Задачи к первой лекции Райгородского

Задача 1. а) (2 балла) Вычислите $m(3)$. б)* (5 баллов) Докажите, что $m(4) \geq 19$.

Задача 2. Скажем, что гиперграф обладает свойством B_k, если его вершины можно так покрасить в два цвета, что в каждом его ребре не менее k вершин первого цвета и не менее k вершин второго цвета. Пусть $m_k(n)$ – минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе, который не обладает свойством B_k. а) (3 балла) Найдите $m_2(5)$. б)* (5 баллов) Найдите $m_n(2n+1)$.

Задача 3. (1 балл) Докажите линейность математического ожидания.

Задача 4. (3 балла) Постройте граф с хроматическим числом не менее пяти и обхватом не менее пяти.

Задача 5. (2 балла) Докажите теорему о двудольном подграфе.

Задача 6. (1 балл) Дана монета, которая с вероятностью $\frac{1}{3}$ падает решкой кверху, а с вероятностью $\frac{2}{3}$ – орлом. Эта монета бросается на стол n раз. Пусть ξ – количество выпадений решки. Найдите $M\xi$.

Задача 7. (2 балла) Даны три одинаковых обычных игральных кости. Если при одновременном бросании этих костей на стол сумма очков равна девяти, то говорим, что произшел успех. Осуществляем такое бросание n раз. Пусть ξ – число успехов. Найдите $M\xi$.

Задачи ко второй лекции Райгородского

Задача 1. Пусть $G(n,p)$ – "шапка" со случайными графами. Найдите MX, если X – это а) (1 балл) число треугольников в графе, б) (1 балл) число полных подграфов на k вершинах, в) (2 балла) число компонент связности, каждая из которых является циклом на k вершинах, г) (3 балла) число компонент связности, каждая из которых является деревом на k вершинах, д) (3 балла) число вершин, принадлежащих компонентам, каждая из которых является циклом, е) (3 балла) число вершин, принадлежащих компонентам, каждая из которых является деревом, ж) (4 балла) число компонент, каждая из которых содержит ровно один цикл.

Задача 2. Назовем граф *дистанционным*, если его вершины – точки плоскости, а ребра – отрезки длины 1. а) (1 балл) Придумайте дистанционный граф с хроматическим числом 4. б) (5 баллов) Придумайте дистанционный граф с хроматическим числом 4 и обхватом 4. в) (10 баллов) Придумайте дистанционный граф с хроматическим числом 4, обхватом 4 и с числом вершин 20 или меньше.

Задача 3. (2 балла) Бывают ли ситуации, когда неравенство Маркова превращается в точное равенство?

Задача 4. (1 балл) Пусть ξ – случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения. Докажите, что $P(\xi = 0) \geq 1 - M\xi$.

Задача 5. (2 балла) Пусть $p = \frac{\omega(n)}{n}$, где $\omega(n)$ – любая функция, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим $G(n,p)$. Докажите, что вероятность отсутствия треугольников в графе стремится к 1 при $n \to \infty$ ("почти наверное" в графе нет треугольников).

Задача 6. (3 балла) Пусть $p = \frac{\omega(n)}{n}$, где $\omega(n)$ – любая функция, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$. Рассмотрим $G(n,p)$. Докажите, что вероятность отсутствия треугольников в графе стремится к 0 при $n \to \infty$ ("почти наверное" в графе есть треугольники).

Задача 7. (3 балла) Пусть $p = \omega(n)n^{-k/(k-1)}$, где $\omega(n)$ – любая функция, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим $G(n,p)$. Докажите, что вероятность отсутствия связных компонент, являющихся деревьями на k вершинах, стремится к 0 при $n \to \infty$ ("почти наверное" в графе нет "изолированных" деревьев на k вершинах).

Задача 8. (4 балла) Докажите, что если $p > \frac{3 \ln n}{n}$, то "почти наверное" случайный граф связен.

Задача 9. (5 баллов) Докажите, что если $p > \frac{c \ln n}{n}$, где $c > 1$, то "почти наверное" случайный граф связен.

Задача 10. (3 балла) Пусть $p = \frac{\omega(n)}{n}$, где $\omega(n)$ – любая функция, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим $G(n,p)$. Докажите, что граф почти наверное двудолен.

Задача 11. (5 баллов) Пусть $p = \frac{c}{n}$, где $c < 1$. Докажите, что почти наверное хроматическое число графа не превосходит трех.

Задача 12. (4 балла) Пусть $p = \frac{c}{n}$, где $c > 50$. Докажите, что почти наверное случайный граф не может быть изображен в виде дистанционного графа на плоскости. Можно ли снизить ограничение на c?