

II Зимняя школа
“Комбинаторная математика и теория алгоритмов”
Даниил Мусатов, “Чего не могут компьютеры”
Задачи для зачёта

Некоторые задачи были решены на лекциях. Если вы присутствовали и поняли решение, сдавать их не нужно. Все задачи сдавать также совсем не обязательно, выберите самые интересные :)

Множеством *натуральных чисел* $\mathbb{N}$ называется множество $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *вычислимой*, если существует алгоритм, который на любом входе n выдаёт $f(n)$, если $f(n)$ определена, и не останавливается в противном случае.

1. Докажите, что не все функции вычислимы.
2. Докажите, что композиция вычислимых функций вычислима.

Множество $X \subset \mathbb{N}$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, который по натуральному числу определяет, принадлежит ли оно X .

3. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда вычислима его характеристическая функция

$$\chi_X(n) = \begin{cases} 1, & n \in X; \\ 0, & n \notin X. \end{cases}$$

4. Докажите, что объединение, пересечение, дополнение разрешимых множеств разрешимы.

5. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно либо пусто, либо является множеством значений всюду определённой неубывающей вычислимой функции.

Множество $X \subset \mathbb{N}$ называется *перечислимым*, если существует алгоритм, печатающий все элементы этого множества в каком-то порядке.

6. Докажите, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно:

- a) является областью определения вычислимой функции;
- b) является областью значений вычислимой функции;
- c) пусто или является областью значений всюду определённой вычислимой функции;
- d) имеет вычислимую полухарактеристическую функцию

$$\tilde{\chi}_X(n) = \begin{cases} 1, & n \in X; \\ \text{не определено,} & n \notin X; \end{cases}$$

- e) является проекцией на первую координату разрешимого множества пар чисел

7. Докажите, что объединение и пересечение перечислимых множеств перечислимо.

8. (Теорема Поста) Докажите, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение перечислимы.

9. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её график $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ перечислим. Докажите, что любое перечислимое множество пар U содержит график вычислимой функции, область определения которой совпадает с проекцией U на первую координату.

10. Докажите, что образ и прообраз перечислимого множества относительно вычислимой функции перечислимы.

11. Пусть X и Y — перечислимые множества. Докажите, что существуют такие перечислимые множества X' и Y' , что $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, $X' \cap Y' = \emptyset$ и $X' \cup Y' = X \cup Y$.

Функция $U: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *универсальной вычислимой*, если она вычислима и для любой вычислимой функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ найдётся такое число n , что при всех x выполнено $U(n, x) = f(x)$.

12. Покажите, что универсальная вычислимая функция существует.

13. При любом фиксированном n функция $U(n, x)$ вычислима как функция от x . Верно ли, что U вычислима как функция двух аргументов?

14. Докажите, что существует универсальное перечислимое множество, т.е. такое перечислимое множество $W \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, что среди множеств $W \cap (\{i\} \times \mathbb{N})$ встречаются все перечислимые множества.

15. Существует ли универсальное разрешимое множество?

16. Докажите, что существует вычислимая функция, которая совпадает с любой другой вычислимой функцией хотя бы на одном аргументе.

17. Функция f *продолжает* функцию g , если $f(n) = g(n)$ при всех n , где $g(n)$ определена. Докажите, что существует вычислимая функция, не имеющая всюду определённого продолжения.

18. Докажите, что множество номеров программ, которые останавливаются на собственном номере, перечислимо, но не разрешимо.

19. Докажите, что существует программа, для которой множество входов, на которых она останавливается, перечислимо, но не разрешимо.

20. Докажите, что существуют две программы, для которых множество входов, на которых первая останавливается, а вторая не останавливается, не перечислимо, и дополнение к этому множеству также не перечислимо.

21. Приведите пример двух непересекающихся перечислимых множеств, не отделимых никаким разрешимым. (Множество отделяет два других множества, если оно содержит первое и не пересекается со вторым.)

22. Приведите пример счётного числа попарно непересекающихся перечислимых множеств, попарно не отделимых никаким разрешимым.

Универсальная вычислимая функция U называется *главной*, если для любой вычислимой функции V двух аргументов существует вычислимая функция одного аргумента s , такая что $U(s(n), x) = V(n, x)$ при всех n и x .

23. Докажите, что существует главная универсальная функция.

Если $U(n, x) = f(x)$, то n называется номером вычислимой функции f . Одна функция может иметь много номеров. Говорят, что универсальная функция задаёт *нумерацию* вычислимых функций. Нумерация, задаваемая главной универсальной функцией,

называется главной.

24. Докажите, что при главной нумерации множество номеров нигде не определённой функции не разрешимо. Является ли оно перечислимым?

25. Придумайте (неглавную) нумерацию, в которой нигде не определённая функция имеет ровно один номер.

26*. Постройте нумерацию, в которой каждая функция имеет ровно один номер.

27. Докажите, что при главной нумерации множество номеров функций, определённых в нуле, не разрешимо. Является ли оно перечислимым?

28. Придумайте (неглавную) нумерацию, в которой множество номеров функций, определённых в нуле, является разрешимым.

29. Является ли множество номеров всюду определённых функций перечислимым? А его дополнение? Зависит ли это от главности нумерации?

30. Является ли перечислимым множество номеров инъективных функций? Его дополнение?

31. Является ли перечислимым множество номеров сюръективных функций? Его дополнение?

Машиной Тьюринга называется абстрактная вычислительная машина, характеризующаяся:

- *Входным алфавитом* Σ (т.е. конечным непустым множеством).
- *Ленточным алфавитом* $\Gamma \supset \Sigma$ с выделенным символом $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$ (называется “бланком” или “пробельным символом”).
- Конечным множеством *внутренних состояний* Q , не пересекающимся с Γ , с двумя выделенными состояниями q_1 (начальным) и q_0 (конечным).
- *Функцией перехода* $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$.

Машина состоит из бесконечной в обе стороны ленты, разделённой на клеточки, в которых могут быть записаны символы из Γ , и рабочей головки, на каждом шаге вычисления указывающей на какую-то клеточку. Также на каждом шаге машина находится в некотором состоянии. Если $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, D)$, то машина, находясь в состоянии q_i и указывая на клетку с символом a_j , заменяет символ на a_s , переходит в состояние q_r и сдвигается налево, направо, или остаётся на месте, если $D = L, R$ или N соответственно. Если машина перешла в состояние q_0 , то она останавливается.

Говорят, что *конфигурация* машины есть $\alpha q a \beta$, где $q \in Q$, $a \in \Gamma$, а $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ (т.е. это слова в алфавите Γ), если она находится в состоянии q , головка указывает на клетку с символом a , слева и справа от этой клетки записаны слова α и β , а остальные клетки заполнены бланками. Говорят, что машина вычисляет функцию $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, если для любого слова $x \in \Sigma^*$ машина, начав с конфигурации $q_1 x$, через некоторое число шагов приходит в конфигурацию $q_0 f(x)$, если $f(x)$ определена, и не останавливается в противном случае.

32. Дайте строгое определение вычисления на машине Тьюринга (существует последовательность конфигураций, такая что...).

Тезис Чёрча–Тьюринга утверждает, что любой мыслимый алгоритм можно реализовать на машине Тьюринга.

33. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции. Считайте, что $\Sigma = \{0, 1\}$, а Γ выбирайте на своё усмотрение.

- а) Нигде не определённую;
- б) Всюду равную пустому слову;
- с) Равную своему входу, написанному два раза (т.е. $f(x) = xx$);
- д) Равную своему входу, написанному задом наперёд.
- е) Равную 1, если вход является палиндромом, и 0 иначе.

Полугруппой называется множество с одной бинарной ассоциативной операцией (обычно называемой умножением). *Свободной полугруппой* с n образующими называется множество всех слов в алфавите $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ с операцией конкатенации (приписывания). *Соотношением* называется равенство вида $A = B$, где A и B суть слова в языке Σ . Пусть заданы несколько соотношений $A_1 = B_1, \dots, A_k = B_k$. Слова P и Q эквивалентны, если существует цепочка $P = P_1, P_2, \dots, P_m = Q$, такая что при любом i найдётся j , такое что $P_i = XA_jY$ и $P_{i+1} = XB_jY$, или $P_i = XB_jY$ и $P_{i+1} = XA_jY$.

34. Докажите, что это отношение эквивалентности.

Полугруппой, заданной множеством соотношений, называется множество классов эквивалентности по этому отношению, с операцией конкатенации.

35. Докажите корректность определения, т.е. докажите, что результат умножения не зависит от выбора представителей.

36. Сколько элементов в полугруппах:

- а) $\langle a \mid a^2 = a \rangle$;
- б) $\langle a \mid a^{10} = a^9 \rangle$;
- с) $\langle a, b \mid ab = ba, a^2 = 1, b^3 = 1 \rangle$?

Пусть фиксирована некоторая полугруппа, заданная конечным числом соотношений. *Проблемой равенства слов* называется задача определения по двум словам, задают ли они один и тот же элемент полугруппы, или нет.

37. Докажите, что множество пар равных слов перечислимо для любой полугруппы.

38. Докажите, что проблема равенства разрешима, если Σ состоит из одного элемента.

39. Докажите, что проблема равенства разрешима, если во всех соотношениях слева и справа стоят слова одинаковой длины.

40. (Теорема Маркова-Поста) Постройте по машине Тьюринга, для которой не разрешима проблема остановки, полугруппу, для которой не разрешима проблема равенства слов.

41. Докажите, что не разрешима проблема конечности полугрупп: по соотношениям определить, конечна полугруппа или нет.