

1 Часть 1

- 1 Какова минимальная кванторная глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать свойство “в *связном* графе не существует индуцированного пути на трех вершинах” (т.е. не найдется таких различных вершин x, y, z , что $x \sim y, x \sim z, y \not\sim z$)?
- 2 Какова минимальная кванторная глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать свойство “все компоненты связности графа — изолированные вершины и клики”.
- 3 Доказать, что существует формула первого порядка кванторной глубины $v + 1$, которая истинна в том и только том случае, если в графе существует простой цикл нечетной длины, не превосходящей $2^v - 1$.
- 4 а) Пусть G — простой цикл на семи вершинах, H — простой цикл на восьми вершинах. Доказать, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на графах G, H в 4 раундах.
б) Пусть G — простой цикл на девяти вершинах, H — простой цикл на восьми вершинах. Доказать, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на графах G, H в 4 раундах.
- 5 Доказать, что свойство связности нельзя записать с помощью формулы первого порядка.
- 6 Докажите, что у любой формулы существует *предваренная нормальная форма*. Иными словами, для любой формулы первого порядка φ существует такая формула первого порядка $\tilde{\varphi}$, все кванторы которой стоят в начале формулы, что для любого графа G
$$G \models \varphi \Leftrightarrow G \models \tilde{\varphi}.$$
- 7 Докажите, что $D(P) = 3$, если F — “весло”.
- 8 Для любого $v \geq 4$ придумайте граф F на v вершинах, для которого $D(P) = v - 1$.