Перечисление графов. Часть 1. Производящие функции. (В.А. Воронов)

1. Запишите в виде отношения двух полиномов производящую функцию для последовательности

(a) $1, 2, 4, \dots, 2^k, \dots$

(b) $1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{k+1}k, \dots$

(c) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, k(k+1), \dots$

(d) $1, 4, 9, \dots, k^2, \dots$

(e) $1, 8, 27, \dots, k^3, \dots$

2. Пусть $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$. Найдите условие, при котором существует такая производящая функция $h(z)$ с действительными коэффициентами, что $(h(z))^2 = g(z)$.

3. Пусть последовательность задана линейной рекуррентной формулой $a_{k+3} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$; $a_0 = a_1 = a_2 = 1$. Найдите производящую функцию.

4. Найдите производяющую функцию для последовательности F_0, F_2, $F_4, \dots$, где F_k — k-е число Фибоначчи.

5. Пусть $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ — производящая функция последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$. Выразите через $g(z)$ производящую функцию последовательности $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$

Перечисление графов. Часть 2. Группы автоморфизмов и цикловые индексы

1. Пусть $\alpha = (123)(45)$ — перестановка 5 элементов. Выпишите все ее различные степени в той же форме.

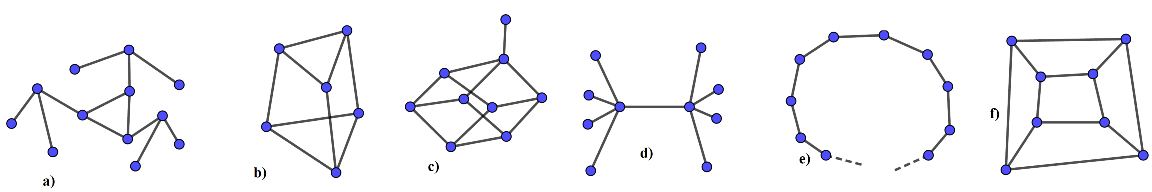

Рис. 1: Графы в задачах 2,3.

2. Для каждого из графов, изображенных на рис. 1, найдите число перестановок вершин, переводящих граф в себя (иными словами, порядок группы автоморфизмов графа). В пункте (e) имеется в виду цикл длины n.

Орбитой вершины v под действием группы автоморфизмов графа называется множество всех вершин, в которые может перейти v, если применять перестановки из этой группы.

3. (a) На сколько орбит разбиваются вершины графов, приведенных на рис. 1? (b) Докажите, что число автоморфизмов делится на количество элементов в любой орбите.

Пусть перестановка $\alpha \in S_n$ задана в виде набора циклов, причем циклов длины 1 (неподвижных точек) среди них k_1; число циклов длины 2 равно k_2 и т.д. Тогда *цикловой индекс перестановки* — это полином $z(\alpha) = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_n^{k_n}$.

Цикловой индекс группы — это сумма цикловых индексов ее элементов, деленная на их число:

$$Z(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} z(\alpha).$$

4. Найдите цикловой индекс (a) циклической группы C_5, состоящей из всевозможных перестановок 5 элементов по кругу; (b) группы C_{12}; (c) группы автоморфизмов цикла длины n (эту группу обычно называют диэдральной и обозначают D_n).

5. Вычислите $Z(S_4)$, используя представления числа 4 в виде суммы натуральных слагаемых.

6. Пусть по определению $Z(S_0) = 1$. Докажите формулу для циклового индекса симметрической группы

$$Z(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k Z(S_{n-k}).$$

7. Производящая функция для чисел Каталана имеет вид $g(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. Используя бином Ньютона $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$, выведите отсюда формулу для n-го числа Каталана $Cat(n) = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

8. Пусть

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k} = (1 + z + z^2 + \dots) \cdot (1 + z^2 + z^4 + \dots) \cdot (1 + z^3 + z^6 + \dots) \cdot \dots$$

Докажите, что коэффициент этого ряда при z^n равен числу способов представления числа n в виде суммы упорядоченных натуральных слагаемых: $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$, $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m$.

9. Найдите производящие функции для числа представлений n (a) в виде суммы упорядоченных нечетных слагаемых (b) в виде суммы попарно различных слагаемых и докажите, что соответствующие ряды совпадают.

Перечисление графов. Часть 3. Теорема Пойа о перечислении

Определения и формулировка теоремы

Взвешенная форма леммы Бернсайда. Обозначим $\mathrm{Orb}(A, X)$ множество орбит группы перестановок A, действующей на множестве X; пусть $\mathrm{orb}(x)$ — орбита, содержащая элемент x; пусть $w(x)$ — вес элемента, причем веса элементов, принадлежащих одной орбите, совпадают, и $w(\Omega)$ — вес орбиты Ω, совпадающий с весом (любого) ее элемента. Наконец, обозначим $fix(\alpha)$ множество неподвижных точек перестановки $\alpha \in A$. Тогда сумма весов орбит удовлетворяет соотношению:

$$|A| \sum_{\Omega \in \mathrm{Orb}(A,X)} w(\Omega) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{x \in fix(\alpha)} w(x).$$

Набросок доказательства. Расммотрим всевозможные пары (α, x), где $\alpha x = x$. Пусть вес пары (α, x) равен $w(x)$. Если подсчитать сумму весов пар как сумму по орбитам, получим левую часть равенства; если подсчитать ее как сумму по перестановкам, получим правую часть.

Частный случай Теоремы Пойа. Пусть P — конечное или счетное множество цветов, и каждый цвет $p \in P$ имеет неотрицательную целую стоимость $w(p)$. Это значит, что покрасить вершину графа в цвет p стоит $w(p)$ рублей. Кроме того, пусть $\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ — производящая функция для числа цветов стоимости k, т.е. в множестве P для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ есть ровно a_k элементов стоимости k. Например, если есть ровно один цвет каждой неотрицательной цены, то $\phi(x) = 1 + x + x^2 + \dots$, а если число цветов конечно, то $\phi(x)$ — многочлен.

Дан граф G на n вершинах. Определим группу автоморфизмов графа $A = \operatorname{Aut} G \subseteq S_n$, действующую на множестве *всех* его вершин. Назовем раскраски вершин графа одинаковыми (изоморфными), если одна переводится в другую перестановкой из A. Тогда верна формула

$$\Phi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = Z\left(A; \phi(x), \phi(x^2), \ldots, \phi(x^n)\right),$$

где b_k — число неизоморфных раскрасок графа G стоимости k. Соответственно, $\Phi(x)$ — производящая функция для раскрасок стоимости k.

Еще более частный случай. Если рассматривается множество из двух цветов $P = \{'Red', 'Blue'\}$ стоимости $w('Red') = 0$ и $w('Blue') = 1$, то $\phi(x) = x + 1$, и формула принимает вид

$$\Phi(x) = Z\left(A; 1 + x, 1 + x^2, \ldots, 1 + x^n\right),$$

т.е. в цикловой индекс группы A следует подставить $s_1 = 1 + x$, $s_2 = 1 + x^2$, ... , $s_n = 1 + x^n$.

Наконец, если нас интересует только общее число вариантов при $|P| = m$ (число m-цветных раскрасок с точностью до изоморфизма), достаточно подставить $s_i = m$:

$$|\operatorname{Col}(G; m)| = \sum_{k=0}^{n(m-1)} b_k = Z\left(A; m, m, \ldots, m\right).$$

Набросок доказательства. Применим взвешенную форму леммы Бернсайда к действию группы автоморфизмов на множестве раскрасок графа. Пусть вес неподвижной раскраски C (и вес соотвествующей орбиты) равен моному x^k, где $k = w(\operatorname{orb} C) = w(C)$ — стоимость раскраски. С одной стороны, сумма таких мономов по всем орбитам равна производящей функции для раскрасок стоимости k. С другой стороны, производящую функцую неподвижных раскрасок для каждой конкретной перестановки можно найти по аналогии с задачей №8 из ч. 1, учитывая, что вершины из каждого цикла должны быть раскрашены в один цвет.

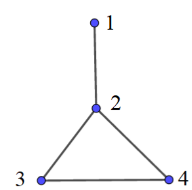

Рис. 2: К примеру и задаче 3.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 2. Группа автоморфизмов содержит 2 элемента: $A = \operatorname{Aut} G = \{(1)(2)(3)(4), \quad (1)(2)(34)\}$. Тогда $Z(A) = \frac{1}{2}(s_1^4 + s_1^2 s_2)$. Подставляя $s_1 = s_2 = 2$, находим число раскрасок в 2 цвета: $|\operatorname{Col}(G, 2)| = (2^4 + 2^3)/2 = 12$.

Задачи

1. Для графов на рис. 3 найдите цикловые индексы группы автоморфизмов и число различных (не переводящихся друг в друга автоморфизмом графа) раскрасок в 2 цвета.

2. Для графа G на рис. 2 определите, как группа автоморфизмов действует на ребрах. Найдите число неизоморфных раскрасок ребер G в 2 и в 3 цвета, вычислив соответствующий цикловой индекс. Верно ли, что число раскрасок в 2 цвета равно числу неизоморфных подграфов G на 4 вершинах?

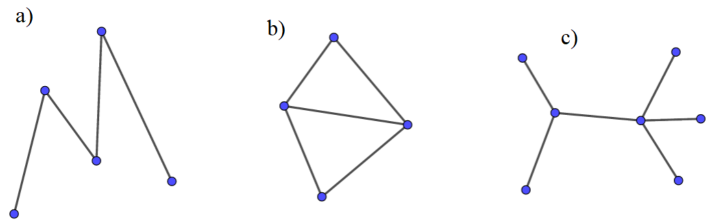

Рис. 3: Графы в задаче 1.

3. Дана перестановка вершин $\alpha = (123)(45)$ полного графа K_5. Как α действует на ребрах K_5? Перенумеруйте ребра и запишите разложение на циклы перестановки ребер. (Если при некоторой перестановке вершин неориентированное ребро 1-2 переходит в ребро 2-1, то его следует считать неподвижным.)

4. Выведите формулу для числа неизоморфных раскрасок граней тетраэдра в k цветов, если считаются одинаковыми раскраски, (a) переходящие друг в друга при поворотах; (b) переходящие друг в друга при поворотах и зеркальных отражениях.

5. Докажите, не используя Теорему Пойа, что для любого графа G с конечным числом вершин число неизоморфных раскрасок в k цветов выражается некоторым многочленом от k.

6. Пусть граф G состоит из двух *неизоморфных* компонент связности G_1, G_2. Докажите, что

$$Z(\operatorname{Aut} G) = Z(\operatorname{Aut} G_1) Z(\operatorname{Aut} G_2).$$

7. Пусть перестановка вершин $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ является произведением циклов длины $l_1, l_2, \ldots, l_m$. (a) Сколько существует двухцветных раскрасок, которые α переводит в себя? (b) Пусть множество P состоит из двух цветов веса 0 и 1. Как найти число раскрасок веса k? (c) Напишите производящую функцию для числа раскрасок веса k, переходящих в себя под действием α, если множество цветов счетно, и их веса равны $0, 1, 2, \ldots$

Список литературы

[1] Воронин С.М., Кулагин А.Г. Метод производящих функций. // Квант, 1984, №5.

[2] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. – МЦНМО, 2007.

[3] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – 1977.