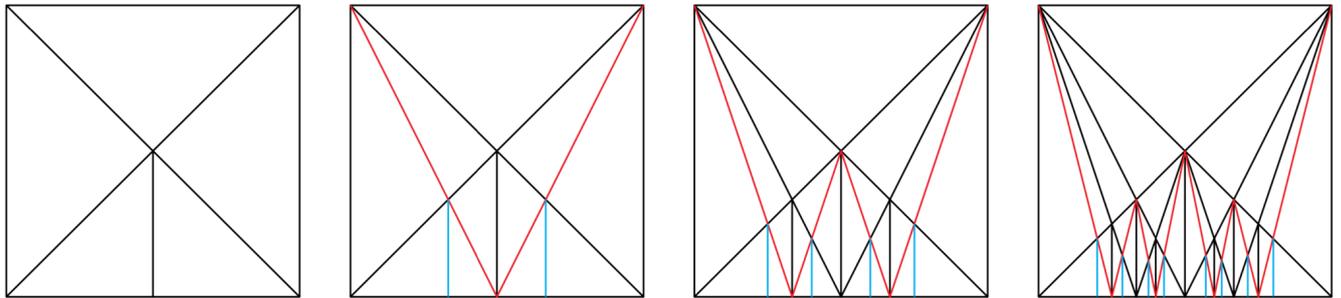


«Диаграммы Фарей, цепные дроби и топокарты»

Задача 1 (Еще один способ построения диаграммы Фарей). а) Докажите, что у трапеции с координатами вершин $(\frac{a}{b}, 0)$, $(\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$, $(\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$, $(\frac{c}{d}, 0)$ точка пересечения диагоналей имеет координаты $(\frac{a+c}{b+d}, \frac{1}{b+d})$.

б) Объясните, как на картинке ниже строится диаграмма Фарей.



Задача 2. Постройте топокарты для форм (а) $Q(v) = x^2 + 3xy + y^2$, (б) $Q(v) = (x-y)^2$.

Задача 3. Докажите, что если квадратичная форма не принимает нулевых значений и принимает значения разных знаков, то река единственна.

Задача 4. Найдите форму, для которой карта содержит два смежных озера.

Задача 5. Докажите, что если форма не равна нулю тождественно, то существует не более двух различных примитивных* векторов, на которых форма равна нулю.

Задача 6. Пусть форма Q обращается в ноль на двух различных примитивных векторах. Докажите, что ее карта содержит два озера, соединенных рекой.

Задача 7. Найдите реку на карте, составленной для форм а) $x^2 - 2y^2$, б) $x^2 + 5xy - y^2$. Убедитесь, что при движении вдоль реки тройки значений формы периодически повторяются.

*целочисленный вектор (x, y) называется примитивным, если $\text{НОД}(x, y) = 1$