Замощения

Задача 1. а) Докажите формулу Бине для чисел Фибоначчи:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

б) Рассмотрим многочлен $F(n,x) = \sum x^{w(T)}$, где сумма берется по всем замощениям T прямоугольника $2 \times n$ доминошками, а $w(T)$ — число вертикальных доминошек, входящих в замощение. Выпишите многочлены $F(n,x)$ при $n \leq 6$.

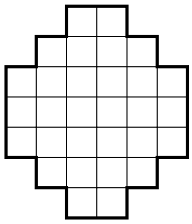
в*) Выведите и докажите формулу для $F(n,x)$, аналогичную формуле Бине.

Задача 2. Сопоставим замощению T ацтекского бриллианта порядка n моном $x^{w(T)}$, где $w(T)$ — число входящих в T вертикальных доминошек. Вычислите многочлен

$$AD(n,x) = \sum_T x^{w(T)},$$

где сумма берется по всем замощениям.

Задача 3. а) Назовем *n-м числом Деланнуа* $D(n)$ число способов провести шахматного короля из левого нижнего в правый верхний угол на доске размера $(n+1)\times(n+1)$. Рассмотрим *утолщенный* ацтекский бриллиант порядка n, к которому добавили еще одну строку максимальной длины. Докажите, что число его замощений равно $D(n)$.



б) А что будет, если строку не добавить, а, наоборот, удалить?

Задача 4*. Придумайте определение ацтекского прямоугольника со сторонами m и n и посчитайте число замощений такой фигуры доминошками (обычный ацтекский бриллиант — это прямоугольник с равными сторонами).

Задача 5 (q-биномиальные коэффициенты). Рассмотрим (двумерные) диаграммы Юнга в прямоугольнике размером $m \times n$. Рассмотрим сумму

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \subset m\times n} q^{|\lambda|},$$

по всем таким диаграммам, где $|\lambda|$ — количество клеточек в диаграмме, q — формальная переменная (например, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$). Покажите, что:

а) $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = 1$; $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q + \dots + q^{m-1}$; $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$;

Задача 6. Положим $[m] = 1 + q + \dots + q^{m-1} = (1-q^m)/(1-q)$ и $[m]! = [1]\cdot[2]\dots[m]$. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]![n]!}.$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что $[m+n] = [m] + q^m[n]$.

Задача 7*. Выведите из правила конденсации формулу Макмагона для числа трехмерных диаграмм Юнга:

$$P(p,q,r) = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}\prod_{k=1}^{r}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Фризы

Задача 8. Перечислите все целочисленные фризы порядка 5 (т.е. состоящие из четырех строк) и докажите, что других нет, не используя теорему Кокстера–Конвея.

Задача 9. Рассмотрим (нецелочисленный) фриз порядка 5 вида

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & \\
\tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

Вычислите значение τ.

Напомним, что *континуанта* $V_n(a_1,\ldots,a_n)$ определяется по рекуррентному правилу $V_0 = 1$, $V_1(a_1) = a_1$,

$$V_n(a_1,\ldots,a_n) = a_n V_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1,\ldots,a_{n-2}).$$

Задача 10. Докажите без использования правила Эйлера *соотношение унимодулярности*:

$$V_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-1})\cdot V_{n-1}(a_2,\ldots,a_n) - V_{n-2}(a_2,\ldots,a_{n-1})\cdot V_n(a_1,\ldots,a_n) = 1.$$

Эти задачи можно обсуждать с Борей Бычковым, Севой Вороновым и Димой Захаровым. Для зачета достаточно сдать 8 задач. Каждый пункт считается как одна задача, задача со звездочкой считается как две.

Фамилия, имя: ____

1а	1б	1в*	2	3а	3б	4*	5а	5б	6	7*	8	9	10

Евгений Юрьевич Смирнов: esmirnov@hse.ru