Савватеев — 1

18.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*1 балл*) Проверить ассоциативность умножения комплексных чисел $(x(yz) = (xy)z)$.

Задача 2. (*3 балла*) Дорешать уравнение $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ с использованием формулы Кардано.

1	2

Савватеев — 1

18.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*1 балл*) Проверить ассоциативность умножения комплексных чисел $(x(yz) = (xy)z)$.

Задача 2. (*3 балла*) Дорешать уравнение $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ с использованием формулы Кардано.

1	2

Савватеев — 1

18.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*1 балл*) Проверить ассоциативность умножения комплексных чисел: $x(yz) = (xy)z$.

Задача 2. (*3 балла*) Дорешать уравнение $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ с использованием формулы Кардано.

1	2

Савватеев — 1

18.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*1 балл*) Проверить ассоциативность умножения комплексных чисел $(x(yz) = (xy)z)$.

Задача 2. (*3 балла*) Дорешать уравнение $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ с использованием формулы Кардано.

1	2

Савватеев — 2

19.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*2 балла*) Пусть $\xi = \sqrt[17]{1}$. Пусть также $\alpha = \xi^{\pm 1} + \xi^{\pm 2} + \xi^{\pm 4} + \xi^{\pm 8}$, а β — сумма остальных степеней. Докажите, что $\alpha\beta = \mathrm{const} \cdot (\xi^1 + \ldots \xi^8 + \xi^{-8} + \ldots \xi^{-1})$.

Задача 2. (*2 балла*) Пусть даны отрезки длины $m, n, 1$, где m, n — произвольные числа, а $n \neq 0$. Докажите, что с помощью циркуля и линейки можно построить отрезки, имеющие длины $m \pm n$, $mn, \frac{m}{n}, \sqrt{m}$.

Задача 3. (*2 балла*) Докажите, что никакое множество из более чем одного элемента не может быть дистрибутивной абелевой группой по сложению и умножению одновременно.

Задача 4. (*2 балла*) Пусть p — простое число. Докажите, что остатки по модулю p можно делить (тогда множество $0, 1, \ldots, p-1$ является полем).

1	2	3	4

Савватеев — 2

19.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*2 балла*) Пусть $\xi = \sqrt[17]{1}$. Пусть также $\alpha = \xi^{\pm 1} + \xi^{\pm 2} + \xi^{\pm 4} + \xi^{\pm 8}$, а β — сумма остальных степеней. Докажите, что $\alpha\beta = \mathrm{const} \cdot (\xi^1 + \ldots \xi^8 + \xi^{-8} + \ldots \xi^{-1})$.

Задача 2. (*2 балла*) Пусть даны отрезки длины $m, n, 1$, где m, n — произвольные числа, а $n \neq 0$. Докажите, что с помощью циркуля и линейки можно построить отрезки, имеющие длины $m \pm n$, $mn, \frac{m}{n}, \sqrt{m}$.

Задача 3. (*2 балла*) Докажите, что никакое множество из более чем одного элемента не может быть дистрибутивной абелевой группой по сложению и умножению одновременно.

Задача 4. (*2 балла*) Пусть p — простое число. Докажите, что остатки по модулю p можно делить (тогда множество $0, 1, \ldots, p-1$ является полем).

1	2	3	4

Савватеев — 3

20.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*3 балла*) Докажите, что если число вида $2^n + 1$ простое, то n — степень двойки.

Задача 2. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен над полем $\mathbb{K}$.

а) (*1 балл*) Докажите, что число $\alpha \in \mathbb{K}$ — корень $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x) \vdots (x - \alpha)$.
б) (*1 балл*) Докажите, что числа $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ — корень $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x) \vdots (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.
в) (*1 балл*) Если $deg(P(x)) = n$, то $P(x)$ имеет не более n корней в поле $\mathbb{K}$.

Задача 3. (*5 балла*) Пусть $\xi_i = \sqrt[p]{1}$.
а) Описать алгоритм группирования ξ_i.
б) Докажите, что при перемножении α_j и β_j получается одна из предыдущих сумм, описанных в алгоритме.

Задача 4. (*2 балла*) Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} = 1(\mod p)$ тогда и только тогда, когда такое b, что $b^2 = a$.

Задача 5. (*2 балла*) Докажите, что $\Psi \equiv \varphi$, где φ — функция Эйлера, а Ψ описана на лекции.

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	4	5

Савватеев — 3

20.08.2019

Фамилия, имя:

Задача 1. (*3 балла*) Докажите, что если число вида $2^n + 1$ простое, то n — степень двойки.

Задача 2. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен над полем $\mathbb{K}$.

а) (*1 балл*) Докажите, что число $\alpha \in \mathbb{K}$ — корень $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x) \vdots (x - \alpha)$.
б) (*1 балл*) Докажите, что числа $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ — корень $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x) \vdots (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.
в) (*1 балл*) Если $deg(P(x)) = n$, то $P(x)$ имеет не более n корней в поле $\mathbb{K}$.

Задача 3. (*5 балла*) Пусть $\xi_i = \sqrt[p]{1}$.
а) Описать алгоритм группирования ξ_i.
б) Докажите, что при перемножении α_j и β_j получается одна из предыдущих сумм, описанных в алгоритме.

Задача 4. (*2 балла*) Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} = 1(\mod p)$ тогда и только тогда, когда такое b, что $b^2 = a$.

Задача 5. (*2 балла*) Докажите, что $\Psi \equiv \varphi$, где φ — функция Эйлера, а Ψ описана на лекции.

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	4	5