

ХII Летняя школа «Комбинаторика и алгоритмы»  
Даниил Мусатов, «Задача о выборах комитета»  
Список зачётных задач

Для получения зачёта достаточно сдать любые 2 задачи из задач 1–3 и любые 2 задачи из задач 4–6

Мы изучаем механизмы голосования с  $m$  альтернативами и  $n$  избирателями. Множество альтернатив обозначим через  $A$ , избирателей — через  $V$ . У каждого избирателя имеются строгие полные предпочтения на множестве альтернатив. (Т.е. альтернативы упорядочены от лучшей к худшей.) Требуется выбрать комитет, т.е. множество из  $k$  альтернатив.

**Определение 1.** *Победителем по Кондорсе* называется альтернатива, которая побеждает любую другую при попарном сравнении.

1. Приведите примеры предпочтений, когда победитель по Кондорсе существует, но не является победителем (возможно, один и тот же пример подойдёт сразу к нескольким пунктам):

- а) При голосовании простым большинством (в один тур);
- б) При голосовании в два тура;
- в) По правилу Борда;
- г) При голосовании по правилу единого передаваемого голоса (STV, т.е. многотуровые выборы с выбыванием по одной альтернативе).

**Определение 2.** *Оценкой Коупленда* альтернативы  $x$  называется число альтернатив, у которых  $x$  побеждает в попарном сравнении. *Правило Коупленда* возвращает альтернативу с максимальной оценкой Коупленда. *Правило  $k$ -Коупленда* возвращает комитет из  $k$  альтернатив с максимальными оценками Коупленда.

**Определение 3.** *Оценкой Симпсона (максиминной)* альтернативы  $x$  называется минимальное по остальным альтернативам  $y$  число избирателей, которые считают, что  $x$  лучше  $y$ . *Правило Симпсона (максиминное)* возвращает альтернативу с максимальной оценкой Симпсона. *Правило  $k$ -Симпсона* возвращает комитет из  $k$  альтернатив с максимальными оценками Симпсона.

**Определение 4.** *Правило NED (Number of External Defeats)* возвращает комитет  $S$  с максимальным количеством пар  $(x \in S, y \in A \setminus S)$ , таких что  $x$  побеждает  $y$  по большинству.

**Определение 5.** *Правило SEO (Size of External Opposition)* возвращает комитет  $S$ , для которого максимален минимум по всем  $(x \in S, y \in A \setminus S)$  числа избирателей, считающих, что  $x$  лучше  $y$ .

2. Приведите пример, когда правила NED и  $k$ -Коупленда возвращают разные результаты, аналогично для SEO и  $k$ -максимина.

3. Докажите или опровергните, что

- а) Единственный победитель по Коупленду обязательно входит в любой комитет, побеждающий по правилу NED.
- б) Единственный победитель по Симпсону обязательно входит в любой комитет, побеждающий по правилу SEO.

**Определение 6.** Правило выбора комитета называется *монотонным по размеру комитета*, если выбранный по этому правилу комитет размера  $k$  является подмножеством выбранного по этому же правилу комитета размера  $k + 1$ .

**Определение 7.** Правило выбора комитета называется *сепарабельным*, если для некоторой функции  $\delta$  выбранный комитет максимизирует сумму величин  $\delta(i_1) + \dots + \delta(i_k)$  по всем избирателям, где  $i_j$  — позиция  $j$ -й альтернативы из комитета в предпочтениях избирателя.

**Определение 8.** Правило выбора комитета Влос возвращает комитет из  $k$  альтернатив, которые чаще всего попадают в список  $k$  лучших у избирателей.

4. Кажется, что правило Влос является сепарабельным для  $\delta(i) = \begin{cases} 1, & i \leq k \\ 0, & i > k \end{cases}$ . Тем не менее:

- а) Приведите пример, когда Влос не является монотонным по размеру комитета.
- б) Докажите, что любое сепарабельное правило является монотонным по размеру комитета.
- в) В чём же ошибка в рассуждении про  $\delta$ ?

**Определение 9.** Правило выбора комитета называется *монотонным по предпочтениям*, если альтернатива, выбранная в комитете для каких-то предпочтений, не исчезнет, если её положение увеличится в некоторых предпочтениях, а взаимное расположение остальных альтернатив не изменится.

5. Докажите, что правило STV не является монотонным по предпочтениям. (Можете выбрать конкретную реализацию STV на своё усмотрение).

**Определение 10.** Правило выбора комитета удовлетворяет свойству консенсусного комитета, если верно следующее. Пусть существует множество  $W$  из  $k$  альтернатив, такое что каждый избиратель ставит какую-то из этих альтернатив на первое место, и каждая альтернатива поставлена на первое место либо  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ , либо  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  избирателями. Тогда правило должно вернуть комитет  $W$ .

6. Докажите, что правила Влос и  $k$ -Борда не удовлетворяют свойству консенсусного комитета.