Комбинаторная геометрия плоскости.

Григорьев Михаил Александрович*
Полянский Александр Андреевич†

Целочисленная решётка. Формула Пика

Домашние задачи

1. На границе целочисленного треугольника нет целочисленных точек, кроме вершин, а внутри всего одна целочисленная точка. Докажите, что эта точка — точка пересечения медиан треугольника.

2. Существует ли целочисленный треугольник площади 1/2, у которого одна из сторон больше 2018?

3. Дан выпуклый целочисленный многоугольник, у которого по крайней мере n^2+1 целочисленных вершин. Докажите, что внутри него найдётся по крайней мере $n-1$ целочисленная точка.

4. Площадь многоугольника P (не обязательно выпуклого) больше n. Докажите, что существует такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{x}+P := \{\mathbf{x}+\mathbf{y} : \mathbf{y} \in P\}$ (сдвиг P на вектор $\mathbf{x}$) будет содержать по крайней мере n целых точек.

5. Площадь многоугольника P (не обязательно выпуклого) меньше n. Докажите, что существует такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{x}+P$ содержит не больше $n-1$ целой точки.

6. Выпуклый многоугольник P площади S и полупериметра p содержит внутри по крайней мере n целочисленных точек. Докажите, что $n > S - p$.

7. Вокруг каждой целочисленной точки за исключением начала координат O построен круг радиуса r. На плоскости выбрана точка A такая, что $OA \geq 1/r$. Докажите, что отрезок OA пересекает один из кругов.

8. Докажите, что нельзя так расположить правильный 5-угольник, что все его вершины являются целочисленными точками.

9. Центр описанной окружности целочисленного остроугольного неравнобедренного треугольника является целочисленной точкой. Какое наименьшее число целочисленных точек может быть внутри этого треугольника?

10. На бесконечной клетчатой плоскости клетки раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Дан многоугольник периметра P и площади S, все стороны которого идут по линиям сетки. Докажите, что этот многоугольник содержит не более $\frac{S}{2}+\frac{P}{8}$ черных клеток.

* *e-mail*: mikhail.grigorev@phystech.edu
† *e-mail*: alexander.polyanskii@yandex.ru. Домашняя страничка: http://polyanskii.com/