Задачи по курсу "Цепные дроби и константа Хинчина"

1. Пусть $X_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, m_n – равномерная мера на X_n (т.е. $m_n(A) = \frac{|A|}{n}$). Рассмотрим все возможные отображения $X_n \to X_n$. Сколько из них сохраняют меру m_n? Сколько из них задают эргодические преобразования относительно меры m_n?

2. Пусть (X, F, m) — пространство X с заданной на нем σ-алгеброй F и мерой m , такой что $m(X) = 1$. Пусть $T : X \to X$ – эргодическое преобразование. Докажите, что для любого $A \in F$ почти любая точка x попадает в A с асимптотической частотой $m(A)$ (это означает, что среди точек $\{x, Tx, T^2x, ..., T^nx\}$ доля тех, которые принадлежат A, стремится к $m(A)$).

3. Пусть $T : x \mapsto \{2x\}$. Существует ли при этом отображении точка с всюду плотной траекторией?

4. а) Число $x \in [0; 1)$ называется нормальным по основанию 2, если в его двоичной записи $0.a_1a_2a_3\dots$ доля единиц среди первых n знаков стремится к $\frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Докажите, что почти все числа нормальны по основанию 2.

   б) Число $x \in [0; 1)$ называется нормальным по основанию k, если доля любой “цифры” в его k-ичной записи стремится к $\frac{1}{k}$. Число $x \in [0; 1)$ называется нормальным, если оно нормально по любому основанию. Докажите, что почти все числа нормальны.

5. а) Пусть $X = [0; 1]$ с мерой Лебега, $T : x \mapsto \{x + \alpha\}$. Докажите, что если α рационально, то T не эргодично.

   б*) Докажите, что если α иррационально, то T эргодично.

Задачи по курсу "Цепные дроби и константа Хинчина"

1. Пусть $X_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, m_n – равномерная мера на X_n (т.е. $m_n(A) = \frac{|A|}{n}$). Рассмотрим все возможные отображения $X_n \to X_n$. Сколько из них сохраняют меру m_n? Сколько из них задают эргодические преобразования относительно меры m_n?

2. Пусть (X, F, m) — пространство X с заданной на нем σ-алгеброй F и мерой m , такой что $m(X) = 1$. Пусть $T : X \to X$ – эргодическое преобразование. Докажите, что для любого $A \in F$ почти любая точка x попадает в A с асимптотической частотой $m(A)$ (это означает, что среди точек $\{x, Tx, T^2x, ..., T^nx\}$ доля тех, которые принадлежат A, стремится к $m(A)$).

3. Пусть $T : x \mapsto \{2x\}$. Существует ли при этом отображении точка с всюду плотной траекторией?

4. а) Число $x \in [0; 1)$ называется нормальным по основанию 2, если в его двоичной записи $0.a_1a_2a_3\dots$ доля единиц среди первых n знаков стремится к $\frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Докажите, что почти все числа нормальны по основанию 2.

   б) Число $x \in [0; 1)$ называется нормальным по основанию k, если доля любой “цифры” в его k-ичной записи стремится к $\frac{1}{k}$. Число $x \in [0; 1)$ называется нормальным, если оно нормально по любому основанию. Докажите, что почти все числа нормальны.

5. а) Пусть $X = [0; 1]$ с мерой Лебега, $T : x \mapsto \{x + \alpha\}$. Докажите, что если α рационально, то T не эргодично.

   б*) Докажите, что если α иррационально, то T эргодично.