

## Задачи про решетки и системы представителей: листок 1

А.М. Райгородский

1. На лекции мы говорили про 20 школьников, 18 предметов и лучшие пятерки по каждому из предметов. Получились оценки 7 (жадный алгоритм) и 6 (гениальный пример). Получите как можно лучшие оценки в случае, когда вместо 20 у нас 22, вместо 18 — 21 и вместо 5 — 6.
2. Получите как можно лучшие оценки в случае, когда вместо 20 у нас 21, вместо 18 — 63, но вместо 5 — тоже 5.
3. Постройте пример ситуации, в которой размер минимальной команды на два меньше размера команды, получаемой с помощью жадного алгоритма.
4. Рассмотрим в двадцатимерном пространстве некоторое множество точек  $V$ , содержащееся в множестве  $\Sigma$ :

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{20}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 20; x_1 + \dots + x_{20} = 5\}.$$

Иными словами,  $V$  — это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим,  $|V| = 20$ . Соединим точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  отрезком, если расстояние между ними есть  $\sqrt{10}$ . Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 7 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными. (Напомним, что расстояние между точками — это корень из суммы квадратов разностей их координат.)

5. Рассмотрим в десятимерном пространстве некоторое множество точек  $V$ , содержащееся в множестве  $\Sigma$ :

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 10; x_1 + \dots + x_{10} = 5\}.$$

Иными словами,  $V$  — это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим,  $|V| = 20$ . Соединим точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  отрезком, если расстояние между ними есть  $\sqrt{8}$ . Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 9 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.

6. Укажите какие-нибудь базисы решетки  $\mathbb{Z}_{(1/2, 1/3)}^2$ .
7. Укажите какие-нибудь базисы решетки  $\mathbb{Z}_{(1/2, 1/4)}^2$ .
8. Укажите какие-нибудь базисы решетки  $\mathbb{Z}_{(1/2, 1/2, 1/2)}^3$ .
9. Укажите какие-нибудь базисы решетки  $\mathbb{Z}_{(1/2, 1/2, 1/3)}^3$ .
10. Укажите какие-нибудь базисы решетки  $\mathbb{Z}_{(1/2, 1/7, 1/3)}^3$ .
11. Докажите, что  $\Lambda_{\mathbf{a}}$  всегда образует решетку, коль скоро  $\Lambda$  — решетка, а  $\mathbf{a}$  — вектор с рациональными координатами.
12. Зачем в задаче 11 нужно условие рациональности координат?