Для получения зачёта необходимо сдать 8 или более задач.

1. Мультипликативные функции

1. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей числа n. Будет ли эта функция мультипликативной? Найдите формулу для $\tau(n)$ (через количество простых сомножителей).

2. Найдите все n, при которых $\sigma(n)$ является степенью 2.

3. Пусть функция f является мультипликативной. Верно ли, что $f(1) = 1$?

4. Назовём пару чисел m и n *дружественной*, если $\sigma(m) = \sigma(n) = m+n$ (сумма делителей одного числа равна другому числу и наоборот). Известно несколько пар дружественных чисел, минимальная пара имеет вид $(220, 284)$.

а) Если p — простое число, $n \geqslant 1$ — натуральное число, то p^n не является дружественным числом.

б) Если k — чётное число, $n > 1$ — натуральное число, то k^n не является дружественным числом.

в) Если $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, где $n > 1$, а p, q, r — простые числа, то пара чисел $2npq$ и $2nr$ является дружественной.

Замечание 1. При $n = 2$ мы получаем пару $(220, 284)$. Также дружественные числа получаются при $n = 4, 7$. Однако (в отличие от утверждения про чётные совершенные числа) известны и пары дружественных чисел, не задаваемые данной формулой, например, $(1184, 1210)$.

2. Свёртка функций. Формула обращения Мёбиуса. Первообразные корни.

5. Докажите, что если f, g — мультипликативные функции, то $f \circ g$ также является мультипликативной.

6. Докажите, что f — мультипликативная функция, не равная тождественно нулю, то найдётся такая мультипликативная функция g, что $f \circ g = \mathbb{1} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$.

Определим *функцию Мёбиуса* $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ является произведением } k \text{ различных простых делителей;} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на } p^2 \text{ для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

7. **а)** Докажите прямым вычислением, что $\sum_{d|n} \mu(d) = \mathbb{1}$.

б) Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа n, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

8. Выпишите порядки всех остатков по модулю 11. Какие остатки являются первообразными корнями? Продемонстрируйте доказательство теоремы о существовании первообразного корня для этого случая (выписав тождества на $F(d)$, где $F(d)$ — количество элементов порядка d).

3. Циклические последовательности

9. (*Недостающая часть доказательства*) Докажите строго, что количество чисел k от 1 до n, для которых НОД$(k, n) = d$ равно $\varphi(\frac{n}{d})$.

10. (*В этой задаче по сути просят повторить доказательство формулы для количества циклических последовательностей*) Пусть $n = 6$, r — произвольное. Рассмотрим множество линейных последовательностей V длины n над алфавитом из r символов.

а) Найдите $|V|$.

б) Какие периоды могут быть у линейных последовательностей из V?

в) Найдите $L_r(d)$ (количество линейных последовательностей длины d периода d) для $d \mid 6$.

г) Найдите $C_r(6)$ (количество циклических последовательностей).

11. Найдите количество циклических последовательностей длины 6 из символов A, B, C, D, которые содержат

а) ровно 3 символа из 4; **б)** не больше 3 символов из 4.

12. (*Применение «теоретико-групповой идеи»*) Обозначим через $P_n(k)$ число перестановок множества натуральных чисел от 1 до n, оставляющих ровно k чисел на своем месте. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$.

1	2	3	4 а	4 б	4 в	5	6	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11 а	11 б	12