

# Покрытие полосами

А.В. Доледенок, А.Н. Доледенок

Летняя школа «Комбинаторика и алгоритмы»—2017

## 1 Вместо введения

В 1997 году на Московской математической олимпиаде в качестве последней задачи в варианте 11 класса была предложена следующая задача М. Смуррова:

*На плоскости дано конечное число полос<sup>1</sup>, сумма ширин которых равна 100, и круг радиуса 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг.*

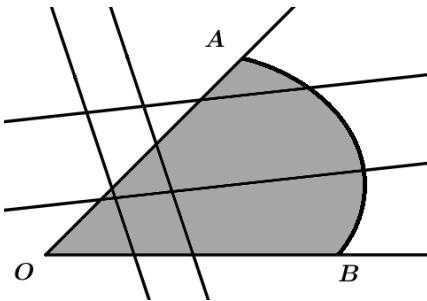


Рис. 1:

Можно представлять себе задачу так: вы пробили в полу круглую дырку, и теперь вам нужно её заложить с помощью нескольких длинных дощечек. Давайте для начала разберём её решение.

Рассмотрим выпуклую фигуру  $F$ , граница которой состоит из кривой  $AB$  и отрезков  $AO$  и  $BO$ . Существуют два вида полос: имеющие ограниченное и неограниченное пересечение с углом  $AOB$  (см. Рис. 1).

Пусть есть несколько полос, которые имеют неограниченное пересечение с углом  $AOB$ , причём стороны каждой полосы не параллельны  $OA$  и  $OB$ . Покажем индукцией по числу полос, что если сумма их ширин не меньше длины кривой  $AB$ , то  $F$  можно покрыть сдвигами этих полос. Для одной полосы утверждение очевидно. Если есть несколько параллельных друг другу полос, то объединим их в одну полосу, ширина которой равна суммарной ширине этих полос. Упорядочим направления полос против часовой стрелки и возьмём крайнее из направлений. Перенесём соответствующую полосу так, чтобы одна из ограничивающих её прямых «касалась» нашей фигуры и при этом полоса имела общие точки с фигурой (*возможны два случая взаимного расположения фигуры  $F$  и полосы, изображенные на Рис. 2*).

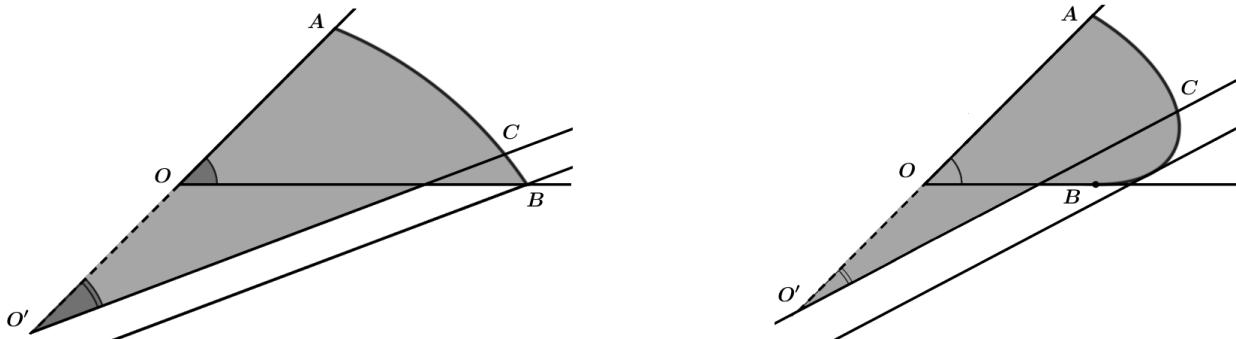


Рис. 2:

Пусть вторая ограничивающая полосу прямая пересекается с кривой  $AB$  в точке  $C$ , а с прямой  $OA$  — в точке  $O'$ . От кривой  $AB$  будет отрезана кривая  $CB$ , длина которой не меньше, чем ширина полосы. Оставшимися полосами покроем фигуру, образованную отрезками  $O'A$ ,  $O'C$  и кривой  $AC$  (это можно сделать по предположению индукции).

Как теперь применить доказанное утверждение к изначальной задаче для единичного круга? Например, следующим образом. Опишем около круга правильный треугольник  $O_1O_2O_3$ , стороны которого не параллельны сторонам ни одной из полос. Каждую полосу «припишем» одному из углов треугольника следующим образом. Проведём через  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  прямые, параллельные сторонам полосы. Тогда ровно одна из этих трёх прямых будет пересекать треугольник. Углу с этой вершиной и припишем эту прямую.

<sup>1</sup>Под полосой подразумевается множество точек между двумя параллельными прямыми.

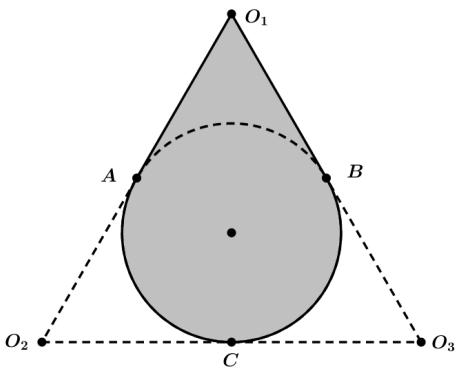


Рис. 3:

Пусть стороны треугольника  $O_1O_2$ ,  $O_1O_3$ ,  $O_2O_3$  касаются круга в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Рассмотрим фигуру  $F_1$ , образованную отрезками  $O_1A$ ,  $O_1B$  и дугой  $ACB$  (см. Рис. 3). Если сумма ширин полос, приписанных углу  $O_1$ , не меньше  $\frac{4\pi}{3}$  (длины дуги  $ACB$ ), то по ранее доказанному ими можно покрыть  $F_1$ , а, следовательно, и изначальный круг. Определим две аналогичные фигуры  $F_2$  и  $F_3$  для вершин  $O_2$  и  $O_3$  соответственно. Если суммарная ширина полос равна  $4\pi$ , то хотя бы одному из углов приписаны полосы, суммарная ширина которых не меньше  $\frac{4\pi}{3}$ , т.е. тогда единичный круг можно покрыть полосами.

Кому-то утверждение задачи покажется очевидным. Если заменить 100 на какое-нибудь существенно большее число (например,  $100^{100}$ ), то много кто сочтёт задачу тривиальной. В таком случае, стереометрический аналог также должен казаться тривиальным:

*В пространстве дано конечное число слоёв<sup>2</sup>, сумма ширин которых равна  $100^{100}$ , и шар радиуса 1. При любом ли расположении слоёв каждый из них можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали шар?*

Эта задача — нерешённая проблема, даже если вместо  $100^{100}$  взять сколь угодно большое число.

Заметим, что в разобранной задаче с ММО число 100 как раз играет роль большого числа — мы доказали, что его можно было бы заменить на  $4\pi$ . А можно ли ещё уменьшить это число, чтобы утверждение осталось верным? Легко показать, что его можно уменьшить до  $\pi+2$ . Действительно, применим доказанное ранее утверждение к фигуре, изображённой на Рис. 4. В качестве кривой возьмём верхнюю полуокружность и два вертикальных отрезка  $AC$  и  $BD$ , в качестве двух отрезков возьмём отрезки  $OA$  и  $OB$  (прямая  $AB$  выбрана таким образом, что она не параллельна ни одной из полос). Получаем, что если сумма ширин полос хотя бы  $\pi+2$ , то круг можно покрыть параллельными переносами полос.

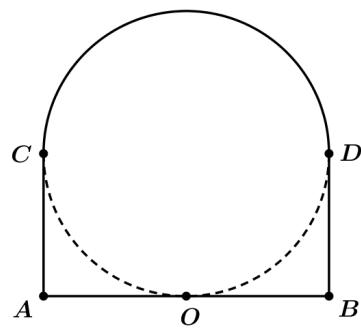


Рис. 4:

А можно ли ещё уменьшить суммарную ширину полос, чтобы утверждение задачи осталось верным? Обратим внимание на то, что в доказательстве мы покрыли не просто круг, а существенно большую фигуру, поэтому есть надежда, что можно спрятаться и меньшей шириной. Через некоторое время мы сможем показать, что поставить в условие задачи меньшее чем  $\pi$  число не получится. А вот можно ли поставить какое-нибудь число, лежащее в интервале от  $\pi$  до  $\pi+2$ ? Это — нерешённая задача. Есть более общая гипотеза:

**Гипотеза.** Любую выпуклую фигуру можно покрыть параллельными сдвигами полос, сумма ширин которых равна половине периметра фигуры.

До сих пор мы ограничивали себя только параллельными переносами полос. Теперь разрешим полосы поворачивать. Какой в таком случае можно предложить естественный алгоритм действий? Напрашивается ответ — клать дощечки «стык в стык», т.е. подряд параллельно друг другу. Но является ли этот алгоритм оптимальным? Оказывается, ничего лучше, действительно, не придумать. Извещное доказательство этого факта получается, если выйти в пространство.

Для этого нам потребуется следующий удивительный факт, известный ещё Архимеду: площадь сферического колечка, которое высекает слой ширины  $\omega$  на сфере диаметра  $d$ , равна  $\pi\omega d$ . Это значит, что как бы мы ни расположили наш слой, площадь кольца будет одинакова. В частности, площадь всей сферы равна  $\pi d^2$ .

Предположим, что круг покрыт полосами, ширины которых равны  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Рассмотрим сферу, для которой наш круг принадлежит экваториальной плоскости. Каждой полосе поставим в соответствие такой слой, что ограничивающие его плоскости проходят через стороны полосы перпендикулярно плоскости круга (см. Рис. 5). Заметим, что если полосами покрыт весь круг, то слои

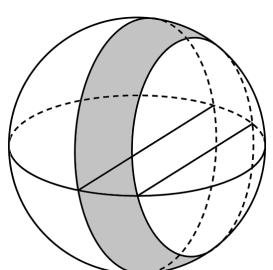


Рис. 5:

<sup>2</sup>Слой — это множество точек между двумя параллельными плоскостями.

покроют всю сферу. Поэтому сумма площадей колечек должна быть не меньше площади всей сферы, т.е.

$$\pi\omega_1d + \pi\omega_2d + \dots + \pi\omega_nd \geq \pi d^2 \Leftrightarrow \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n \geq d,$$

что и требовалось. Заметим также, что если какие-то две полосы, покрывающие круг, пересекаются внутри круга, то неравенство станет строгим, т.е. суммарная ширина будет строго больше диаметра круга. Поэтому любой способ покрытия круга, кроме как «встык», потребует большей суммарной ширины дощечек.

## 2 Технические определения

С кругом разобрались. А если дырка получилась в форме треугольника? многоугольника? эллипса? какой-нибудь непонятной кляксы? Чтобы аккуратно сформулировать задачу в этом случае, дадим несколько определений.

*Шириной фигуры в направлении*  $\vec{v}$  называется ширина  $\omega(\vec{v})$  самой узкой полосы, перпендикулярной вектору  $\vec{v}$  и содержащей данную фигуру. Иначе говоря, проведём прямую, параллельную  $\vec{v}$ , и спроектируем на эту прямую нашу фигуру. Длина получившегося отрезка и будет равна ширине по направлению. *Шириной* фигуры называется наименьшая из ширин по направлению, т.е. ширина самой узкой полосы, в которую можно заключить фигуру (см. Рис. 6).

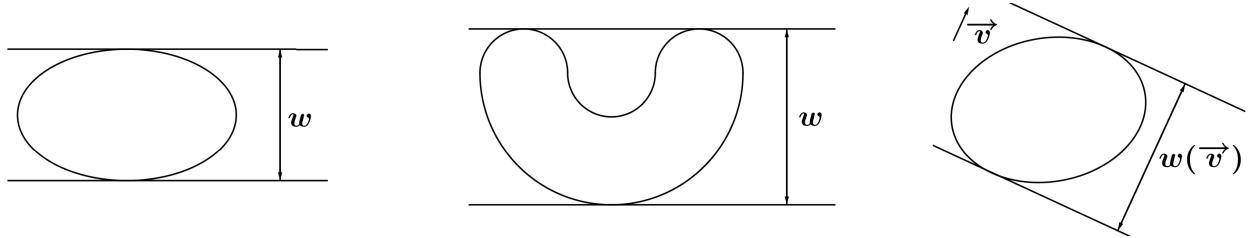


Рис. 6:

Как получить полосу, заключающую фигуру? Проведём прямую, перпендикулярную  $\vec{v}$  и не пересекающую фигуру. Начнём двигать её по направлению к фигуре. В тот момент, когда прямая коснётся фигуры, перестанем двигать прямую. Полученная прямая называется *опорной* — это прямая, которая имеет общие точки с фигурой и вся фигура лежит по одну сторону относительно прямой. Рассмотрев аналогичную прямую с обратной стороны относительно нашей фигуры, получим нужную полосу.

Например, ширина круга в любом направлении равна его диаметру. У единичного квадрата ширина по направлению может принимать любое значение от 1 до  $\sqrt{2}$ .

Интересный вопрос: верно ли, что только у круга ширина в каждом направлении одинакова? Нет, пример легко строится. Рассмотрим правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $\omega$ . Проведём окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB$ . Оставим от этой окружности только меньшую дугу  $BC$ . Проделаем аналогичные операции с двумя другими вершинами (см. Рис. 7).

Полученная фигура называется *треугольником Рело*. Проведём пару параллельных опорных прямых и пару перпендикулярных им опорных прямых.

Получим квадрат, который содержит треугольник Рело. Сторона этого квадрата не зависит от выбора опорных прямых и равна  $\omega$ , т.е. наш треугольник может свободно вращаться внутри квадрата. Это свойство используют, чтобы сверлить квадратные отверстия. Получается очень точно — площадь вырезанной фигуры отличается от площади квадрата примерно на 1.2%. Подробнее с фигурами постоянной ширины и их свойствами можно ознакомиться в [7], [3], [2].

Ширина — не самый интуитивно очевидный объект. Например, следующее упражнение иллюстрирует не очень приятное свойство ширины:

**Упражнение.** Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать прямой

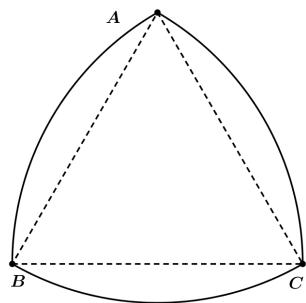


Рис. 7:

рата не зависит от выбора опорных прямых и равна  $\omega$ , т.е. наш треугольник может свободно вращаться внутри квадрата. Это свойство используют, чтобы сверлить квадратные отверстия. Получается очень точно — площадь вырезанной фигуры отличается от площади квадрата примерно на 1.2%. Подробнее с фигурами постоянной ширины и их свойствами можно ознакомиться в [7], [3], [2].

Ширина — не самый интуитивно очевидный объект. Например, следующее упражнение иллюстрирует не очень приятное свойство ширины:

**Упражнение.** Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать прямой

на две части так, чтобы сумма ширин частей была больше ширины исходного треугольника.

Однако не всё так плохо, некоторые естественные свойства выполняются. Например, если фигура  $A$  лежит внутри фигуры  $B$ , то ширина  $B$  больше ширины  $A$ .

**Упражнение.** Докажите, что ширину выпуклого многоугольника можно найти следующим образом: для каждой стороны найти расстояние до наиболее удалённой от неё вершины, а затем среди этих расстояний выбрать наименьшее. В частности, ширина треугольника равна его наименьшей высоте.

Основным объектом нашего исследования будут *выпуклые фигуры*. Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две точки фигуры, целиком содержится внутри фигуры. Для многоугольников это определение равносильно стандартному определению: многоугольник является выпуклым, если каждый его угол не больше  $180^\circ$ .

*Выпуклой оболочкой* множества точек  $S$  называется наименьшая по включению выпуклая фигура, которая целиком содержит  $S$ . Выпуклую оболочку можно получить следующим образом: положим на плоскость ниточку, которая обхватит все наши точки, а затем натянем её. Фигура, охваченная ей, и будет выпуклой оболочкой. Если точек конечное число, то их выпуклая оболочка — это выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из этих точек. Если это круг и точка вне этого круга, то выпуклой оболочкой является фигура, изображённая на Рис. 8.

Нам понадобятся следующие три свойства выпуклых фигур:

- *Пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой.*

Действительно, если взять точки  $A$  и  $B$  внутри пересечения двух выпуклых фигур, то отрезок  $AB$  лежит и в первой фигуре, и во второй фигуре, следовательно, лежит в их пересечении.

- *В каждой точке границы выпуклой фигуры  $F$  можно провести опорную прямую.*

Возьмём произвольную точку границы  $A$ . Проведём из неё всевозможные лучи, проходящие через отличные от  $A$  точки фигуры. В силу выпуклости эти лучи заполнят полуплоскость или угол, меньший  $180^\circ$  (см. Рис. 9). В первом случае опорной прямой будет ограничивающая полуплоскость прямая. Во втором случае нам подойдёт любая прямая, не проходящая внутри угла.

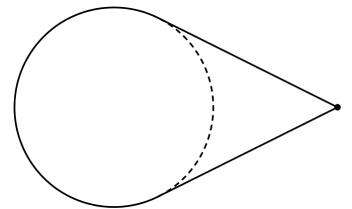


Рис. 8:

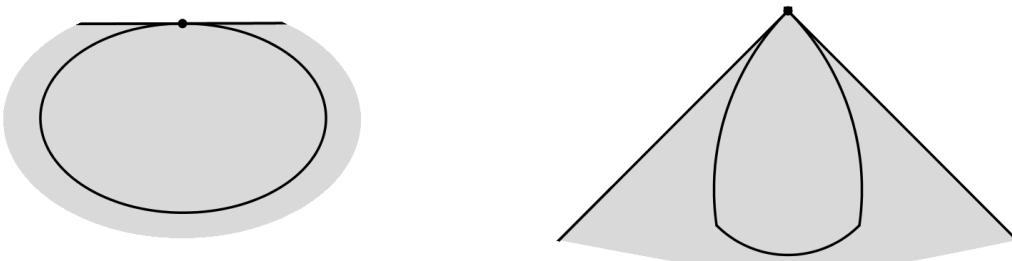


Рис. 9:

- *Через концы наибольшей хорды в направлении  $\vec{v}$  выпуклой фигуры  $F$  можно провести пару параллельных опорных прямых.*

Рассмотрим наибольшую хорду  $AB$  в направлении  $\vec{v}$  (если их несколько, то рассмотрим любую из них). Аналогично предыдущему пункту, построим углы  $CAB$  и  $DBA$ , в которых содержится  $F$  (см. Рис. 10). Докажем, что  $\angle CAB + \angle DBA \leq 180^\circ$ . Предположим противное. Выберем на границе  $F$  такие точки  $C_0$  и  $D_0$ , что  $\angle C_0 AB + \angle D_0 BA > 180^\circ$ . В силу выпуклости, отрезки  $AC_0$  и  $BD_0$  целиком лежат внутри фигуры. Проведём прямую, параллельную  $AB$  и пересекающую отрезки  $AC_0$  и  $BD_0$  в точках  $A'$  и  $B'$  соответственно. Тогда длина отрезка  $A'B'$  больше длины отрезка  $AB$ , что противоречит выбору  $AB$ .

Следовательно,  $\angle CAB + \angle DBA \leq 180^\circ$ . Аналогично  $\angle EAB + \angle GBA \leq 180^\circ$ . Теперь существование нужных опорных прямых очевидно.

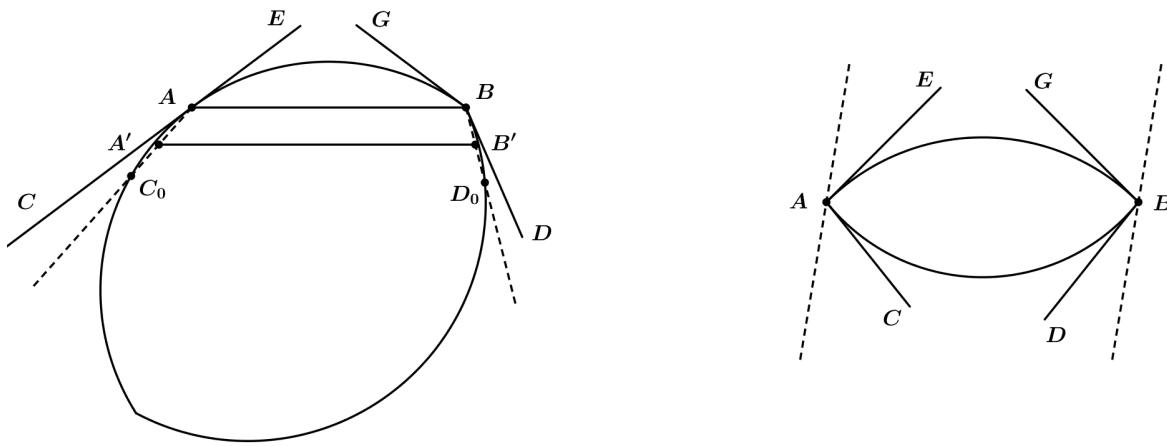


Рис. 10:

*Диаметром* фигуры называется расстояние между двумя самыми удалёнными точками фигуры. Рассмотрим точки  $A$  и  $B$  фигуры, расстояние между которыми равно диаметру. Проведём через эти точки прямые, перпендикулярные  $AB$ . Если эти прямые не являются опорными, то можно выбрать отрезок внутри фигуры, длина которого больше  $AB$ , что противоречит нашему выбору. Следовательно, через концы диаметра можно провести опорные прямые, перпендикулярные диаметру. Поэтому ширина по направлению меняется в промежутке от ширины фигуры до диаметра фигуры.

### 3 Теорема Банга-Тарского<sup>3</sup>

Вернёмся к покрытию фигур полосами. Мы доказали, что если круг покрыт полосами, то суммарная ширина полос не меньше диаметра круга. Что будет в случае, если у нас какая-то другая фигура? Как в этом случае нужно закладывать дырку? Интуитивно хочется сказать, что наш алгоритм сильно не поменяется: находим направление, вдоль которого фигура самая «узкая», т.е. направление, на котором достигается ширина, и кладём дощечки подряд. В 1932 г. А. Тарский высказал следующую гипотезу, которую в 1950 г. доказал датский математик Т. Банг:

**Гипотеза Тарского.** *Если выпуклая фигура покрыта полосами, то суммарная ширина полос не меньше ширины фигуры.*

Можно понимать условие гипотезы так: если дырка покрыта несколькими дощечками суммарной ширины 1, то всю дырку можно покрыть одной дощечкой ширины 1. Иными словами, гипотеза Тарского говорит, что ничего лучше, чем класть дощечки «встык», мы не придумаем. Мы можем придумать не хуже, но лучше — не можем. Например, правильный треугольник можно закрыть тремя дощечками так, как изображено на Рис. 11. Ясно, что их суммарная ширина равна ширине треугольника.

**Упражнение.** *Докажите, что без условия выпуклости фигуры гипотеза Тарского неверна.*

В попытке доказательства гипотезы Тарского хочется попробовать придумать для выпуклой фигуры поверхность, которая ведёт себя также, как сфера для круга, т.е. любой слой фиксированной ширины высекает на поверхности кусок фиксированной площади. Однако, такая поверхность существует только для круга (см. [16]).

Попробуем доказать гипотезу Тарского для малого числа полос. Для одной полосы утверждение очевидно. Пусть фигуру  $F$  покрывают две полосы. Если они параллельны, утверждение очевидно. Иначе полосы в пересечении образуют параллелограмм  $ABCD$ . Вершины  $ABCD$  являются внешними или граничными точками фигуры  $F$ . Действительно, если  $A$  — внутренняя точка, то хотя бы одна из частей угла (на Рис. 12 отмечена красным) содержит точки фигуры, т.е. не покрыта полосами.

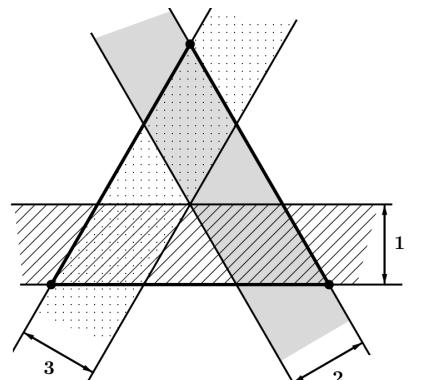


Рис. 11:

<sup>3</sup>Не путать с парадоксом Банаха-Тарского.

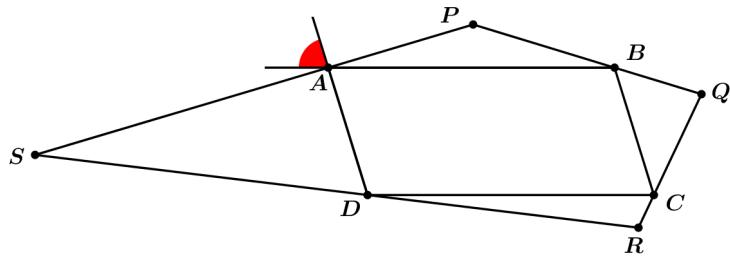


Рис. 12:

Можно провести через вершины параллелограмма прямые, не пересекающие фигуру  $F$ . Действительно, если  $A$  — граничная точка  $F$ , то подойдёт опорная прямая. Если же  $A$  — внешняя точка  $F$ , то соединим отрезком какую-нибудь точку границы  $X$  с вершиной  $A$  так, чтобы этот отрезок не имел больше общих точек с  $F$ . Тогда прямая, параллельная опорной прямой в точке  $X$ , будет искомой.

Проведём в каждой вершине параллелограмма прямую, не пересекающую  $F$ . Эти прямые образуют четырёхугольник  $PQRS$ , который целиком содержит  $F$ , т.е. его ширина не меньше ширины  $F$ . Теперь осталось доказать, что сумма высот параллелограмма не меньше ширины четырёхугольника.

**Упражнение.** Завершите доказательство гипотезы Тарского для двух полос.

Но если полос уже будет три, то у нас возникнут проблемы. Если полос две, то они обязательно пересекаются по параллелограмму. А вот три полосы могут пересекаться по шестиугольнику, а могут по треугольнику. Нам пришлось бы рассмотреть несколько случаев. С увеличением числа полос количество случаев будет расти, поэтому нам надо придумать что-то новое.

Идея доказательства гипотезы Тарского в общем случае следующая. Рассуждать об абстрактной выпуклой фигуре сложно — про неё ничего толком непонятно, кроме выпуклости. Поэтому по данной выпуклой фигуре мы сконструируем вспомогательную фигуру, покажем, что её можно поместить в выпуклую фигуру, а накрыть полосами — нельзя.

Фигура будет следующая. Пусть есть набор векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ . Возьмём произвольную точку  $O$  и отложим от неё  $2^n$  векторов вида  $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$ , где каждое  $a_i \in \{0, 1\}$ . Соединим отрезками точки, для которых линейные комбинации векторов отличаются ровно в одном коэффициенте. Полученное множество точек с отрезками назовём *остовом*. На Рис. 13 изображён пример остовов для двух и трёх векторов.

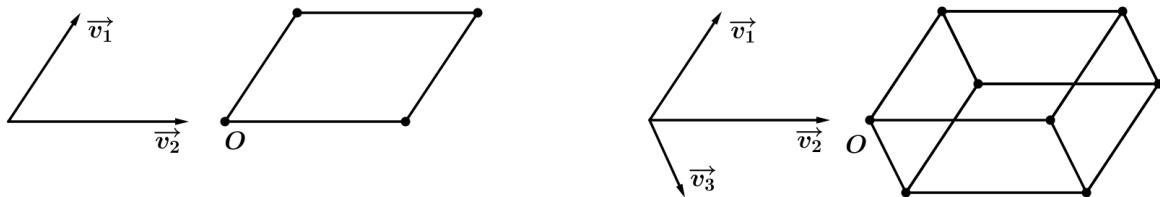


Рис. 13:

**Упражнение.** Докажите, что остов центрально симметричен относительно некоторой точки  $X$ , причём  $\overrightarrow{OX} = \frac{\vec{v}_1}{2} + \frac{\vec{v}_2}{2} + \dots + \frac{\vec{v}_n}{2}$ . Докажите, что остов можно получить следующим образом: из центра симметрии остова отложить  $2^n$  линейных комбинаций вида  $\pm \frac{\vec{v}_1}{2} \pm \frac{\vec{v}_2}{2} \pm \dots \pm \frac{\vec{v}_n}{2}$ .

В дальнейшем нас будут интересовать только такие множества векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , что никакие из  $2^n$  получившихся точек не совпадают, т.е. никакая линейная комбинация  $b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \dots + b_n\vec{v}_n$  не равна 0 при  $b_i \in \{-1, 0, 1\}$ . Соответствующий остов мы будем называть *невырожденным остовом*.

Давайте разберёмся, что остов из себя представляет. Из построения остова следует, что из каждой вершины остова выходит ровно  $n$  рёбер, длины которых равны  $|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2|, \dots, |\vec{v}_n|$ . Далее докажем индукцией по числу векторов, что границей остова является выпуклый  $2n$ -угольник (возможно, вырожденный), причём его противоположные стороны равны и параллельны. Из этого несложно вывести, что остов является центрально симметричным.

**Упражнение.** Докажите, что если для каждой стороны выпуклого многоугольника найдётся

равная и параллельна ей, то многоугольник имеет центр симметрии.

Заметим, что остав можно построить так. Точку  $O$  переносим на вектор  $\vec{v}_1$ , полученный отрезок перенесём на вектор  $\vec{v}_2$ , полученный параллелограмм — на вектор  $\vec{v}_3$  и т.д. (см. Рис. 14).

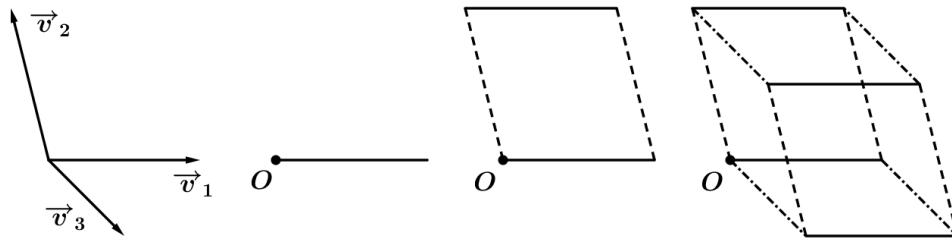


Рис. 14:

Для двух векторов наше утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для  $k$  векторов. Добавим  $(k+1)$ -ый вектор  $\vec{v}_{k+1}$ . Возможно два случая.

- Пусть  $\vec{v}_{k+1}$  не коллинеарен ни с каким из  $\vec{v}_i$ , где  $i \leq k$ . Рассмотрим направление, перпендикулярное  $\vec{v}_{k+1}$ , и выберем в этом направлении две самых крайних вершины  $A$  и  $B$  границы остава (у которых координата по перпендикулярному направлению самая большая и самая маленькая). Докажем, что эти вершины противоположны в нашем  $2k$ -угольнике.

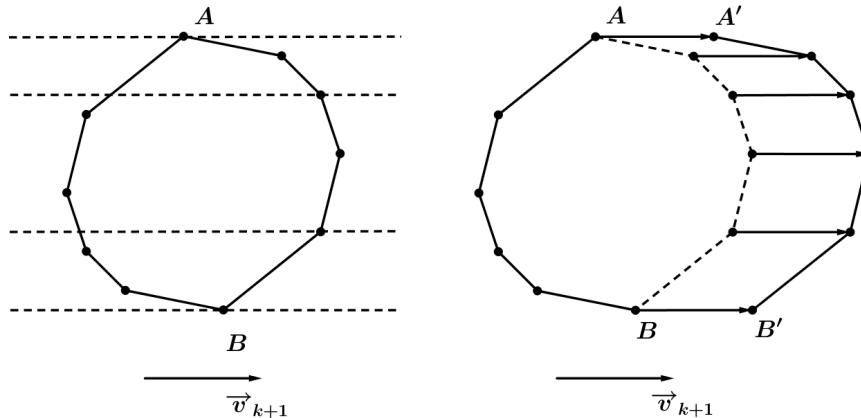


Рис. 15:

Проведём через  $A$  и  $B$  прямые, параллельные  $\vec{v}_{k+1}$  (см. Рис. 15). Они не пересекут наш многоугольник (иначе  $A$  и  $B$  не были бы крайними). Пусть  $A$  и  $B$  не противоположны. Отразим нашу картинку относительно центра симметрии многоугольника. Получим четыре вершины, через которые проходят четыре параллельных прямых, ни одна из которых не пересекает многоугольник. Получаем противоречие, поэтому  $A$  и  $B$  противоположны.

Теперь вершины границы нового остава можно получить следующим образом: все вершины между  $A$  и  $B$  с одной стороны оставляем на месте (включая  $A$  и  $B$ ), а с другой стороны все вершины между  $A$  и  $B$  переносим на  $\vec{v}_{k+1}$ . Тогда стороны  $AA'$  и  $BB'$  будут противоположны (где  $A'$  и  $B'$  такие точки, что  $\overrightarrow{AA'}$  и  $\overrightarrow{BB'}$  равны  $\vec{v}_{k+1}$ ), оставшиеся стороны также останутся противоположными, т.е. в этом случае переход доказан.

- Пусть  $\vec{v}_{k+1}$  коллинеарен с каким-то из  $\vec{v}_i$ , где  $i \leq k$ . Рассмотрим стороны  $AB$  и  $CD$  такие, что вектора  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$  сонаправлены с  $\vec{v}_{k+1}$  (см. Рис. 16). Что будет являться вершинами нового остава? Все вершины между  $B$  и  $D$  (включая  $B$  и  $D$ ), а также переносы всех вершин между  $B$  и  $D$  на вектор  $\vec{v}_{k+1}$  (включая переносы  $B$  и  $D$ ). Очевидно, что полученный многоугольник будет удовлетворять условию. Собственно, мы не включили вершину  $C$  и перенос вершины  $A$  на вектор  $\vec{v}_{k+1}$ , чтобы у нас остался многоугольник, удовлетворяющий условию.

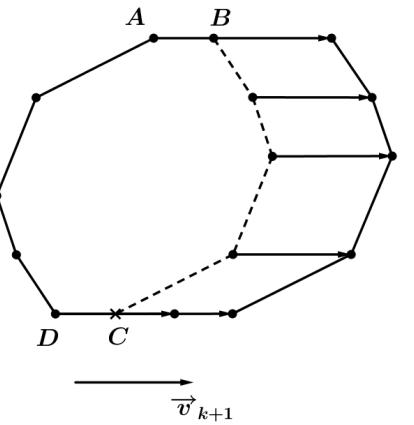


Рис. 16:

**Доказательство гипотезы Тарского.** Предположим, что гипотеза Тарского неверна. Пусть фигура  $F$  покрыта полосами  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , сумма ширин  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  которых меньше ширины  $\omega$  фигуры  $F$ . Полосе  $S_i$  сопоставим вектор  $\vec{v}_i$ , перпендикулярный её сторонам (из двух возможных направлений вектора выберем произвольное) и по длине больший  $\omega_i$ , причём длины векторов необходимо выбрать таким образом, чтобы сумма этих длин была меньше  $\omega$ . Также выберем длины так, чтобы остав, построенный по этим векторам, был невырожденным (небольшими шевелениями длин векторов этого можно добиться). Построим по этим векторам остав.

Зачем мы строим такую странную фигуру? Сначала мы покажем, что остав можно поместить внутрь исходной фигуры. Затем возьмём его произвольную вершину. Она покрыта какой-то полосой. Чтобы гарантированно из этой полосы выйти, нам нужно переместиться на вектор, перпендикулярный сторонам полосы и по длине больший ширины полосы. В силу определения остава, это можно сделать, переместившись по ребру остава. Пусть мы попали в новую полосу. Выдем из неё, потом выдем из новой полосы и т.д. Хочется надеяться, что, действуя таким образом, мы рано или поздно выдем за пределы полос, т.е. найдем непокрытую полосами вершину остава.

Докажем, что остав можно поместить в фигуру. Нам потребуется

**Лемма.** Пусть  $F$  — выпуклая фигура,  $\omega$  — её ширина,  $F'$  — фигура, полученная из  $F$  параллельным переносом на вектор  $\vec{v}$ . Тогда ширина пересечения  $F \cap F'$  не меньше, чем  $\omega - |\vec{v}|$ .

**Доказательство.** Пусть  $|\vec{v}| < \omega$ , в противном случае утверждение очевидно. Рассмотрим наибольшую хорду  $AB$  фигуры  $F$  в направлении  $\vec{v}$ . Проведём через точки  $A$  и  $B$  опорные прямые  $m$  и  $n$ . Пусть прямая  $l$  получается из прямой  $m$  параллельным переносом на вектор  $\vec{v}$ ,  $C$  — точка пересечения прямых  $l$  и  $AB$ . Без ограничения общности,  $l$  пересекается с фигурой  $F$  (см. Рис. 17).

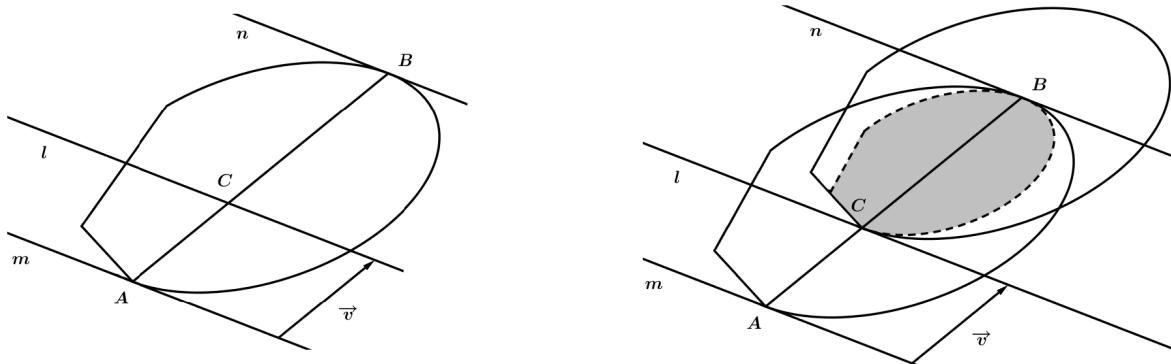


Рис. 17:

Рассмотрим фигуру  $\tilde{F}$ , полученную гомотетией с центром в точке  $B$  и коэффициентом  $\frac{BC}{BA}$ . Очевидно, что  $\tilde{F}$  лежит внутри  $F$ . Заметим, что  $\tilde{F}$  можно получить из  $F'$  гомотетией с центром в точке  $C$  и таким же коэффициентом, поэтому  $\tilde{F}$  лежит и внутри  $F'$ . Получаем, что ширина пересечения не меньше, чем  $\frac{BC}{BA} \cdot \omega$ . Воспользовавшись тем, что  $|\vec{v}| = AC$ , получим цепочку равносильных неравенств.

$$\frac{BC}{BA} \cdot \omega \geq \omega - |\vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{v}| \geq \omega \cdot \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC \geq \omega \cdot \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AB \geq \omega.$$

Последнее неравенство верно, поскольку  $\omega$  — ширина  $F$ .

Теперь доказать, почему остав можно поместить в фигуру, совсем просто. Рассмотрим сдвиг фигуры  $F$  на вектор  $\vec{v}_1$ . Пересечение получившейся фигуры с  $F$  обозначим за  $F_1$ . По доказанной лемме, ширина  $F_1$  не меньше, чем  $\omega - |\vec{v}_1|$ . Аналогично рассмотрим сдвиг  $F_1$  на вектор  $\vec{v}_2$ , его пересечение с  $F_1$  обозначим  $F_2$ . Таким же образом определим последовательность фигур  $F_3, \dots, F_n$ . Согласно лемме, ширина  $F_n$  не меньше  $\omega - |\vec{v}_1| - |\vec{v}_2| - \dots - |\vec{v}_n| > 0$ , поэтому  $F_n$  непуста, т.е. существует точка  $O \in F_n$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Интересно оценить площадь полученной фигуры. Этим вопросом мы займёмся в разделе 6.

Если теперь перенести точку  $O$  на вектор  $-\vec{v}_n$ , то полученная точка  $O_1$  будет лежать в фигуре  $F_{n-1}$ . Если перенести отрезок  $OO_1$  на вектор  $-\vec{v}_{n-1}$ , то полученный отрезок будет лежать в  $F_{n-2}$  и т.д. В итоге мы получим остав, т.е. он целиком лежит в  $F$ .

Осталось доказать, что остав нельзя покрыть полосами. Наше доказательство завершит

**Лемма Банга.** *Пусть даны вектора  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , причем каждому  $\vec{v}_i$  поставлена в соответствие полоса  $S_i$ , стороны которой перпендикулярны  $\vec{v}_i$ , а ширина меньше  $|\vec{v}_i|$ . Тогда система полос  $S_1, S_2, \dots, S_n$  не покрывает все вершины остава, построенного по векторам  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .*

**Доказательство леммы Банга.** Предположим, что существует покрытие остава этими полосами. Возьмём произвольную вершину остава  $X$ . Пусть она покрыта полосой  $S_i$  (если таких полос несколько, выберем из них произвольную). Рассмотрим ребро остава, соответствующее вектору  $\vec{v}_i$ , одной из вершин которого является точка  $X$ . Переместимся во вторую вершину этого ребра. Если мы опять оказались покрыты какой-то полосой, то опять переместимся в соответствующую вершину. Докажем, что «убегая» таким образом из полос, мы не сможем вернуться в изначальную вершину.

Пусть в процессе какого-то обхода (не обязательно в процессе «убегания» из полос) мы перешли из точки  $A$  в точку  $B$ . Пусть  $C$  — точка пересечения прямой  $AB$  и оси симметрии  $l$  соответствующей полосы (см. Рис. 18). Ребру  $AB$  припишем число  $BC^2 - AC^2$ . Заметим, что для любой точки  $D$  на прямой  $l$  выполнено равенство

$$BD^2 - AB^2 = (BC^2 + CD^2) - (AC^2 + CD^2) = BC^2 - AC^2.$$

Рис. 18: Если мы прошли по ребру в процессе «убегания», то ребру приписано положительное число. Действительно, точка  $A$  лежит внутри полосы, а точка  $B$  — снаружи, т.е.  $BC > AC$ . Теперь докажем, что сумма чисел для рёбер любого замкнутого маршрута равна 0.

В силу невырожденности остава, в нашем замкнутом маршруте для любой стороны есть равная и параллельная ей (иначе какой-то вектор выражался бы линейной комбинацией остальных). Рассмотрим минимальный возможный замкнутый маршрут — параллелограмм  $ABCD$  (см. Рис. 19). Пусть оси симметрии соответствующих полос пересекаются в точке  $X$ . Тогда рёбрам  $AB, BC, CD, DA$  составлены числа  $BX^2 - AX^2, CX^2 - BX^2, DX^2 - CX^2, AX^2 - DX^2$ . Их сумма равна 0.

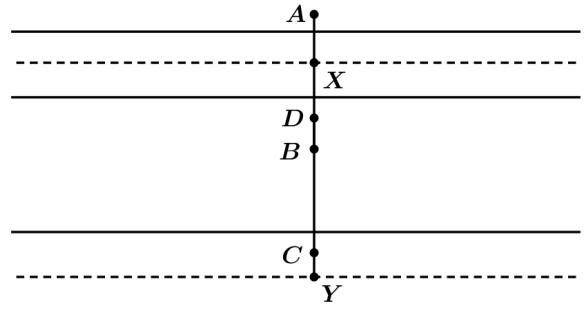
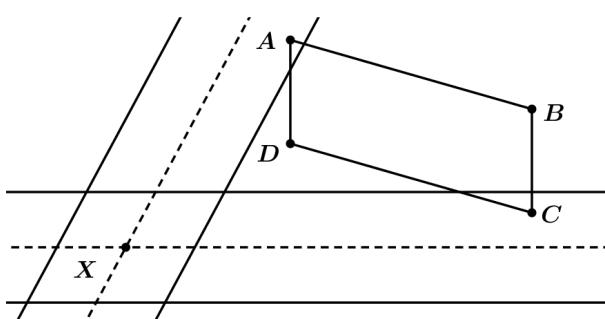


Рис. 19:

Если же параллелограмм вырожденный, то обозначим точки пересечения прямой, на которой лежат все точки, с осью первой полосы за  $X$ , а с осью второй полосы — за  $Y$ . Рёбрам  $AB, BC, CD, DA$  соответствуют числа  $BX^2 - AX^2, CY^2 - BY^2, DX^2 - CX^2, AY^2 - DY^2$ . Сложив их и воспользовавшись равенством  $AB = CD$ , получим

$$\begin{aligned} & (BX^2 - AX^2) + (CY^2 - BY^2) + (DX^2 - CX^2) + (AY^2 - DY^2) = \\ & = AB(BX - AX) + CD(CY - DY) - CD(DX + CX) + AB(AY + BY) = \\ & = AB(BX + BY) + AB(AY + CY) - AB(AX + CX) - AB(DX + DY) = \\ & = AB(XY + AC - AC - XY) = 0. \end{aligned}^5$$

<sup>5</sup>Конечно, наше рассуждение зависит от порядка точек на прямой. Но это легколечится введением координат, что мы предоставляем сделать читателю.

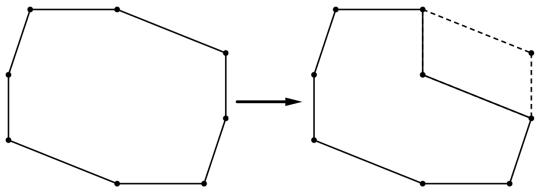


Рис. 20:

Пусть стороне в процессе какого-нибудь обхода приписано число. Если сторону в процессе какого-нибудь другого обхода пройти в обратном направлении, то приписанное ей число поменяет свой знак. Отсюда легко видеть, что если маршрут состоит более чем из четырёх рёбер, то можно менять местами соседние стороны, не меняя при этом суммы всех приписанных рёбрам чисел обхода (как на Рис. 20). Рассмотрим произвольный вектор из обхода и вектор, противоположный ему. Перестановками соседних сторон поставим их рядом, т.е. поставим их так, чтобы они имели общую вершину. Поскольку из каждой точки остава исходит ровно одно ребро, длина которого равна длине конкретного вектора, по которым остав построен, то соответствующие векторам отрезки совпадают, поэтому им соответствуют противоположные числа. Поставим таким образом рядом все пары противоположных векторов. Поскольку они противоположно направлены, то сумма приписанных чисел будет равна 0.

Поскольку в процессе «убегания» рёбрам приписываются только положительные числа, то вернуться в вершину, в которой мы уже были, мы не сможем. Следовательно, в какой-то момент мы окажемся в вершине, которую не покрывает ни одна полоса.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, заданный в первом разделе, а именно, почему в случае круга константа не меньше  $\pi$ .

**Упражнение.** Докажите, что утверждение «Если суммарная ширина множества полос на плоскости не меньше  $\lambda$ , то единичный круг можно покрыть параллельными переносами этих полос» неверно, если  $\lambda < \pi$ . (Воспользуйтесь тем, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся правильный  $n$ -угольник, вписанный в единичную окружность, периметр которого заключён между  $2\pi - \varepsilon$  и  $2\pi$ .)

## 4 Гипотезы Банга и Дэвенпорта

Относительной шириной полосы назовём отношение ширины этой полосы к ширине фигуры в направлении, перпендикулярном полосе. В 1951 году Т. Банг высказал следующую гипотезу (см. [10]):

**Гипотеза Банга.** Если выпуклая фигура покрыта несколькими полосами, то сумма их относительных ширин не меньше 1.

Из этой гипотезы следует гипотеза Тарского. Действительно, рассмотрим направление, ширина вдоль которого равна ширине фигуры. Для каждой полосы покрытия  $S$  рассмотрим полосу  $S'$ , стороны которой перпендикулярны этому направлению, а относительная ширина такая же. Понятно, что обычная ширина полосы  $S'$  не больше ширины полосы  $S$ . Поскольку сумма относительных ширин хотя бы 1, то сумма ширин новых полос не меньше ширины фигуры, что и гласит гипотеза Тарского.

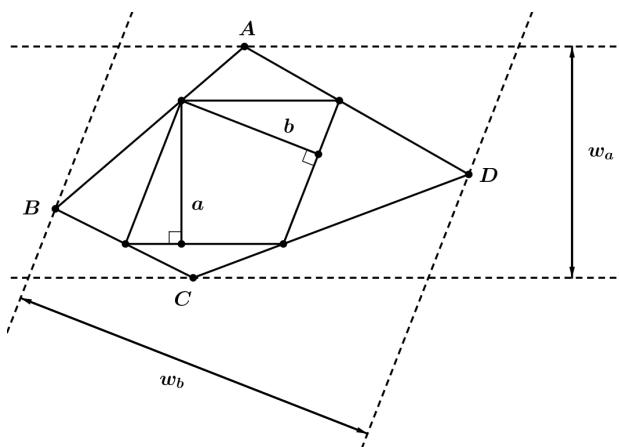


Рис. 21:

Как и при доказательстве теоремы Банга-Тарского, начнём со случая двух полос. Как и раньше, рассмотрим параллелограмм, образованный пересечением полос (если полосы параллельны, то утверждение очевидно), и проведём опорные прямые в его вершинах. Получим четырёхугольник  $ABCD$ , целиком содержащий нашу фигуру (см. Рис. 21). Пусть ширины полос  $S_a$  и  $S_b$  равны  $a$  и  $b$ , ширина четырёхугольника в соответствующих направлениях равна  $\omega_a$  и  $\omega_b$  соответственно.

Обозначим  $\alpha = \frac{a}{\omega_a}$ ,  $\beta = \frac{b}{\omega_b}$ , площадь параллелограмма пересечения полос обозначим через  $S$ . Рассмотрим два треугольника с вершинами  $A$  и  $C$ , которые покрывают полосу  $S_b$ , но не покрывают полосу  $S_a$ . Расписав площади этих треугольников и параллелограмма через высоты и основания, получим, что отношение суммарной площади этих треугольников к площади параллелограмма равно  $\frac{\omega_a - a}{2a} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}$ . Аналогично отношение суммарной площади треугольников с вершинами  $B$  и  $D$  к площади параллелограмма равно  $\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}$ .

трехугольников к площади параллелограмма равно  $\frac{\omega_a - a}{2a} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}$ . Аналогично отношение суммарной площади треугольников с вершинами  $B$  и  $D$  к площади параллелограмма равно  $\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}$ .

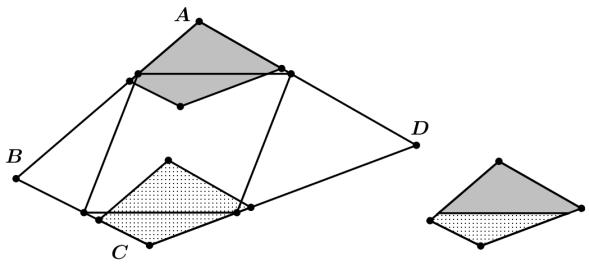


Рис. 22:

Рассмотрим образы четырёхугольника  $ABCD$  при гомотетиях относительно точек  $A$  и  $C$  с коэффициентом  $1 - \alpha$ . Нетрудно понять, что части этих образов, лежащие внутри треугольников с вершинами  $A$  и  $C$ , при совмещении дадут в точности четырёхугольник, гомотетичный  $ABCD$  с коэффициентом  $1 - \alpha$  (см. Рис. 22). Отсюда следует, что суммарная площадь этих треугольников не меньше площади  $ABCD$ , умноженной на  $(1 - \alpha)^2$ . Получаем неравенство

$$\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) \geq (1 - \alpha)^2 \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha}{\alpha} \geq (1 - \alpha)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} \geq (1 - \alpha) \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha + \beta \geq 1.$$

Итак, мы доказали гипотезу Банга для двух полос. В 1991 году К. Болл [9] доказал гипотезу для центрально симметричных тел. На данный момент это является лучшим продвижением. Однако, это доказательство неэлементарно, поэтому мы его не приводим. В случае произвольного числа полос гипотеза Банга до сих пор не доказана. Оказалось, что гипотеза Банга равносильна следующей гипотезе, возникшей из задач диофантовых приближений:

**Гипотеза Дэвенпорта.** *Выпуклая фигура  $F$  разрезана  $n$  прямыми на части. Фигура  $F'$  получена из фигуры  $F$  гомотетией с коэффициентом  $\frac{1}{n+1}$ . Тогда существует параллельный перенос фигуры  $F'$  такой, что он содержится в фигуре  $F$  и не пересекает ни одной из прямых.*

Докажем, что для единичного круга  $B$  гипотезы Банга и Дэвенпорта равносильны.<sup>6</sup> Для единичного круга гипотеза Банга равносильна теореме Банга-Тарского, поскольку ширина круга в каждом направлении одинакова.

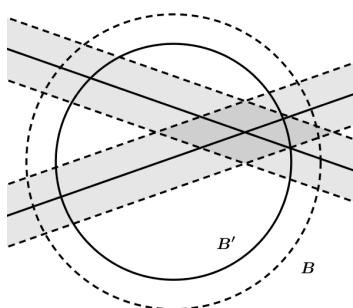


Рис. 23:

Пусть верна гипотеза Банга. Рассмотрим концентрический с  $B$  круг  $B'$  радиуса  $\frac{n}{n+1}$ . Для каждой прямой  $l$ , разрезающей наш круг, рассмотрим полосу ширины  $\frac{2}{n+1}$ , стороны которой симметричны относительно  $l$  (см. Рис. 23). Заметим, что если найдётся точка в  $B'$ , не попавшая внутрь ни одной из построенных полос, то круг радиуса  $\frac{1}{n+1}$  с центром в этой точке будет лежать внутри исходного круга  $B$  и не будет пересекать секущие прямые (но, возможно, будет касаться). Суммарная ширина полос равна  $\frac{2n}{n+1}$ , т.е. диаметру  $B'$ . Поэтому если полосы не параллельны друг другу, то по теореме Банга-Тарского найдётся непокрытая точка. Если же полосы параллельны друг другу, то гипотеза Дэвенпорта, очевидно, верна: если единичную окружность пересечь  $n$  параллельными прямыми, то ширина хотя бы одной части

будет не меньше  $\frac{2}{n+1}$ , т.е. в неё можно будет вписать круг радиуса  $\frac{1}{n+1}$ .

Обратно, пусть верна гипотеза Дэвенпорта. Предположим, что гипотеза Банга неверна (мы знаем, что для единичного круга гипотеза Банга верна, но давайте про это пока забудем), т.е. нам удалось покрыть единичный круг полосами, сумма относительных ширин которых меньше 1 (соответственно, сумма обычных ширин меньше 2). Увеличим ширину каждой полосы так, чтобы она стала рациональной, но при этом сумма ширин по-прежнему была бы меньше 2 (очевидно, это можно сделать) и выражалась несократимой дробью, числитель которой хотя бы на 2 больше знаменателя. Пусть ширины полос равны  $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ . Теперь разобьем каждую полосу на меньшие полосы ширины  $\frac{1}{N}$  каждая, где  $N = q_1 q_2 \dots q_n$ . Сложим дроби (получим суммарную ширину получившихся полос) и приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \dots + \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_1 q_2 \dots q_n + q_1 p_2 q_3 \dots q_n + \dots + q_1 \dots q_{n-1} p_n}{q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{k}{N}.$$

Числитель этой дроби равен количеству полос нового разбиения. Выбор ширин гарантирует нам, что  $k < N - 1$ . Рассмотрим ось симметрии каждой из полос, для этих прямых применим гипотезу Дэвенпорта. Получим, что есть круг радиуса  $\frac{1}{N}$ , целиком лежащий внутри  $B$  и не пересекающий ни одну из прямых. Поскольку  $k + 1 < N$ , то центр круга удалён от каждой прямой на расстояние, большее чем  $\frac{1}{N}$ . Получаем, что его центр не покрыт полосами, противоречие.

<sup>6</sup>Доказательство общего утверждения о равносильности использует ту же идею, см. [8]

## 5 Покрытия в несколько слоёв

Пусть дощечки у нас тонкие. В этом случае хочется заделать нашу дыру в несколько слоёв, чтобы они не сломались под нашим весом. Если дырка круглая, то совершенно аналогично доказательству теоремы Банга-Тарского для круга доказывается

**Теорема.** *Если единичный круг покрыт несколькими полосами в  $k$  слоёв, то сумма ширин полос не меньше чем  $2k$ .*

Естественно, возникает гипотеза: если выпуклая фигура ширины  $\omega$  покрыта в  $k$  слоёв, то сумма ширин этих полос не меньше  $k\omega$ . Однако, это утверждение неверно, например, на Рис. 24 равносторонний треугольник покрыт тремя полосами, ширина которых в 2 раза меньше высоты треугольника.

Разумно задать такой вопрос. Обозначим через  $c_k(F)$  наибольшее положительное  $c$  такое, что если выпуклая фигура  $F$  покрыта несколькими полосами в  $k$  слоёв, то сумма ширин полос не меньше  $ck\omega$ .

**Упражнение.** Найдите  $c_2(F)$ , если  $F$  — квадрат.

**Упражнение.** Найдите  $c_k(F)$  для  $k \geq 2$  и некоторой выпуклой фигуры  $F$  на ваш выбор, отличной от круга и квадрата.

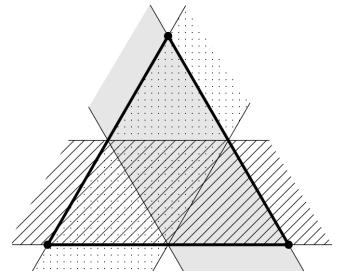


Рис. 24:

## 6 Частичные покрытия

Пусть теперь дощечек недостаточно. Но мы всё равно хотим покрыть дырку так, чтобы не провалиться в неё, т.е. чтобы самой «дырки» осталось как можно меньше. На математический язык наше желание переформулируется следующим образом. Пусть суммарная ширина полос меньше ширины фигуры. Какая наименьшая площадь фигуры может остаться непокрытой? Конечно, ответ зависит от фигуры.

Обратимся к доказательству теоремы Банга-Тарского. Накроем фигуру  $F$  ширины  $\omega$  полосами  $S_1, \dots, S_n$  суммарной ширины  $\omega_0$  произвольным образом. Как и при доказательстве того, что построенный по этим полосам остав можно разместить в фигуре, построим последовательность выпуклых фигур  $F_0 = F, F_1, \dots, F_n$ , где  $F_i$  — это пересечение  $F_{i-1}$  со сдвигом  $F_{i-1}$  на вектор  $\vec{v}_i$  — вектор, перпендикулярный сторонам полосы  $S_i$  и по длине равный ширине  $S_i$  (в доказательстве теоремы Банга-Тарского длина вектора  $\vec{v}_i$  была чуть больше ширины  $S_i$ ). Ширина  $F_n$  не меньше  $\omega - \omega_0$ .

**Лемма.** Площадь непокрытой части фигуры  $F$  не меньше, чем площадь  $F_n$ .

Мы не будем приводить строгого доказательства леммы, ограничившись лишь основной идеей. Рассмотрим первую полосу, она разбивает  $F$  на две части. Сдвинем одну из этих частей на вектор  $\vec{v}_1$ , «схлопнув» полосу  $S_1$ . Несложно показать, что  $F_1$  можно целиком поместить в полученную фигуру. Последовательно «схлопнув» полосы  $S_2, \dots, S_n$ , мы получим фигуру  $F'$ . Фигуру  $F_n$  можно целиком поместить в  $F'$ . Но  $F'$  состоит из непокрытых полосами  $S_1, \dots, S_n$  частей исходной фигуры  $F$ , поэтому площадь непокрытой части  $F$  не меньше площади  $F_n$ .

Лемма позволяет оценивать площадь непокрытой части. Например, если  $F$  — треугольник, то и  $F_n$  — также треугольник, гомотетичный исходному. Отсюда следует, что если наша исходная фигура — это треугольник  $ABC$ , причём высота из вершины  $A$  наименьшая, то полосы оптимально совместить так, чтобы образовалась одна полоса ширины  $\omega_0$ , одна из сторон которой должна совпасть с прямой  $BC$  (см. Рис. 25).

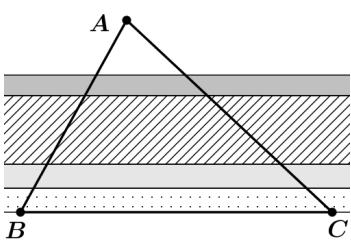


Рис. 25: Треугольник  $ABC$ , покрытый полосой шириной  $\omega_0$ , параллельной основанию  $BC$ . Вершина  $A$  надолго осталась непокрытой.

Действительно, площадь непокрытой части не меньше площади треугольника с шириной  $\omega - \omega_0$ , а именно такой треугольник и остаётся непокрытым в нашем построении. Отметим, что могут существовать и другие покрытия, дающие такую же непокрытую площадь.

Почти для всех фигур, отличных от треугольника, точная оценка неизвестна. Неизвестна она даже для круга. Довольно естественно предположить, что наибольшая площадь круга покроется, если полосы положить параллельно «встык» и их объединение положить симметрично относительно центра

круга. Однако, это нерешённая задача. Интересно, что для шара эта задача решена, там подобное расположение действительно оптимально:

**Теорема.** *Пусть даны единичный шар  $\Omega$  и несколько слоёв  $S_1, \dots, S_n$ , суммарная ширина которых меньше 2. Тогда, чтобы покрыть слоями наибольший объём шара, необходимо объединить их в одну полосу  $S$ , ширина которой равна суммарной ширине полос, и расположить  $S$  симметрично относительно центра шара.*

**Доказательство.** Доказательство будет основано на двух фактах. С первым из них мы уже встречались: площадь сферического колечка, которое высекает слой ширины  $\omega$  на сфере диаметра  $d$ , равна  $\pi\omega d$ . Второй вспомогательный факт — это

**Принцип Кавальieri.** *Пусть даны два тела  $A$  и  $B$  и произвольная плоскость  $\alpha$ . Если всякая плоскость  $\beta$ , параллельная  $\alpha$ , высекает в  $A$  и  $B$  фигуры  $a_\beta$  и  $b_\beta$  такие, что площадь  $a_\beta$  не превосходит площади  $b_\beta$ , то объём тела  $A$  не превосходит объёма тела  $B$ .*

Принцип Кавальieri возникает из следующих соображений. Проведём плоскости  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , параллельные  $\alpha$ , на равном расстоянии  $\varepsilon$  друг от друга. Тела  $A$  и  $B$  окажутся разрезанными на «ломтики» толщины  $\varepsilon$ . Объём «ломтика» между плоскостями  $\alpha_i$  и  $\alpha_{i+1}$  внутри тела  $A$  приблизительно равен произведению площади фигуры  $a_{\alpha_i}$  и  $\varepsilon$  — толщины слоя. Поскольку площадь  $a_{\alpha_i}$  не превосходит площади  $b_{\alpha_i}$ , то объём «ломтика» тела  $A$  не превосходит объема соответствующего «ломтика» тела  $B$ . Суммируя объёмы всех ломтиков, получаем неравенство на объёмы  $A$  и  $B$ .

Вернёмся к доказательству теоремы. Рассмотрим сферу  $\Omega_t$  радиуса  $t$ , концентрическую с  $\Omega$ . Площадь, которую высекают полосы  $S_1, \dots, S_n$  на  $\Omega_t$ , не превосходит площади, которую высекает на  $\Omega_t$  полоса  $S$  (это вытекает из того, что колечки, соответствующие полосам  $S_1, \dots, S_n$ , могут пересекаться). Воспользуемся теперь видоизменённым принципом Кавальieri: вместо плоскостей, параллельных фиксированной плоскости, рассмотрим сферы  $\{\Omega_t, 0 \leq t \leq 1\}$ , концентрические исходной сфере  $\Omega$ . Понятно, что справедливость принципа от такой замены не изменится. Площадь, высекаемая сферой  $\Omega_t$  на теле  $\Omega \cap S$ , не меньше площади, высекаемой  $\Omega_t$  на теле  $\Omega \cap (S_1 \cup \dots \cup S_n)$ , откуда из видоизменённого принципа Кавальieri получим требуемое неравенство на объёмы. Осталось заметить, что если полосы  $S_1, \dots, S_n$  расположены не так, как в условии теоремы, то для каких-то сфер из множества  $\{\Omega_t, 0 \leq t \leq 1\}$  высекаемая площадь будет строго меньше, значит и объём будет строго меньше.

Какую оценку мы можем дать в общем случае, когда про форму фигуры ничего неизвестно? Площадь непокрытой части этой фигуры не меньше площади фигуры ширины  $\omega - \omega_0$ , где  $\omega$  — ширина покрываемой фигуры,  $\omega_0$  — сумма ширин полос. То есть мы хотим понять, какая минимальная площадь может быть у фигуры заданной ширины. Здесь нам поможет

**Теорема Пала.** *Пусть  $\omega$  — ширина, а  $S$  — площадь выпуклой фигуры  $F$ . Тогда  $S \geq \omega^2 / \sqrt{3}$ , причём равенство достигается только для равностороннего треугольника.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется изучить новый объект — вписанную окружность. Для выпуклой фигуры  $F$  вписанной окружностью назовём окружность наибольшего радиуса, которая содержится внутри  $F$ . Опустим вопрос, почему эта окружность существует. Нам понадобятся следующие свойства вписанной окружности:

1. У всякой выпуклой фигуры есть либо одна вписанная окружность, либо их бесконечно много.

Пусть есть две таких окружности. Проведём отрезки их общих внешних касательных, заключенные между точками касания (см. Рис. 26).

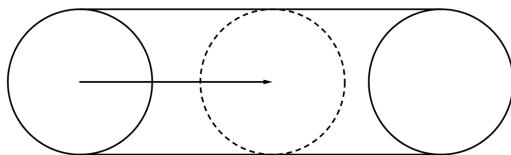


Рис. 26:

Фигура, полученная объединением окружностей и этих отрезков, лежит целиком внутри  $F$  в силу выпуклости. Поэтому если параллельно сдвинуть одну окружность в направлении другой,

то образ также будет лежать внутри  $F$ . Итого получаем, что либо вписанная окружность одна, либо их бесконечно много, причём в этом случае они все касаются параллельных прямолинейных кусков границы  $F$ .

2. Среди точек касания вписанной окружности с границей фигуры есть либо две диаметрально противоположных точки, либо три точки, которые являются вершинами остроугольного треугольника.

Если у окружности нет общих точек с границей, то немного раздув её (не меняя центра), получим окружность большего радиуса, также лежащую внутри нашей фигуры. Если у окружности одна общая точка  $A$  с границей, то сдвигом окружность параллельно прямой  $OA$  (где  $O$  — центр окружности) так, чтобы у сдвига общих точек с границей не было. Полученную окружность также можно увеличить. Если окружность имеет две или более общих точек с границей, причём существует дуга  $AB$ , большая  $180^\circ$  и не содержащая других граничных точек, то сдвигом нашу окружность в направлении перпендикуляра к  $AB$ , после чего её опять можно увеличить. Иллюстрацию этих трех случаев см. на Рис. 27.

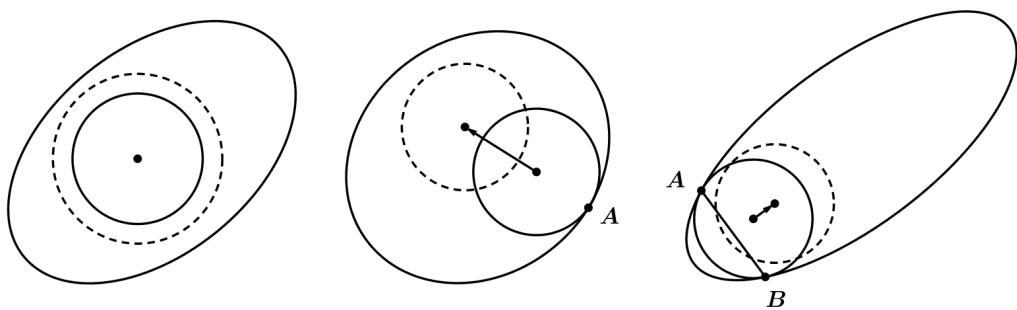


Рис. 27:

3. Рассмотрим граничную точку, в которой вписанная окружность касается фигуры  $F$ . Тогда в этой точке касательная к окружности является опорной прямой для  $F$ .

Рассмотрим опорную прямую в точке касания. Она является опорной и для окружности, однако единственная опорная прямая к окружности — это касательная.

4. Пусть  $\omega$  — ширина выпуклой фигуры,  $r$  — радиус вписанной в неё окружности. Тогда  $\frac{\omega}{3} \leq r \leq \frac{\omega}{2}$ . (Нижнюю оценку обычно называют теоремой Бляшке.)

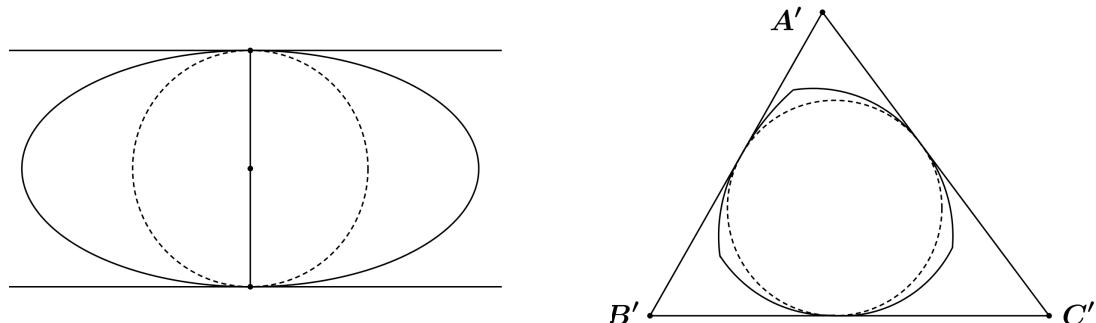


Рис. 28:

Верхняя оценка очевидна. Действительно, вписанная окружность помещается в полосу ширины  $\omega$ , поэтому её диаметр не больше  $\omega$ . Докажем теперь нижнюю оценку. Если вписанная окружность касается фигуры в двух диаметрально противоположных точках (см. Рис. 28), то фигура помещается в полосу, границы которой — это касательные к окружности. Следовательно, в этом случае радиус окружности будет равен в точности  $\frac{\omega}{2}$ .

Пусть окружность касается границы в трёх точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Проведём в этих точках касательные, получим треугольник  $A'B'C'$ , внутри которого располагается наша фигура. Обозначим стороны этого треугольника через  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Пусть  $a$  — длина наибольшей стороны, тогда ширина треугольника равна длине высоты  $h_a$ , проведённой из вершины  $A$ . Записав площадь двумя способами, получим

$$\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2}ah_a \Leftrightarrow h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \cdot r \leqslant 3r.$$

Поскольку ширина треугольника равна наименьшей высоте, то получаем требуемое неравенство. Отметим, что равенство возможно только если исходная фигура — равносторонний треугольник.

**Доказательство теоремы Пала.** Без ограничения общности можно считать, что  $\omega = 1$ . Если вписанная окружность касается фигуры в двух диаметрально противоположных точках, то  $r = \frac{1}{2}$ . Но площадь всей фигуры не меньше площади вписанного круга, т.е. не меньше  $\frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . К сожалению, если точек касания три, то оценка площади фигуры через площадь вписанного круга будет слишком слабой: площадь вписанного круга будет не меньше  $\frac{\pi}{9}$ , что меньше нужной нам величины  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

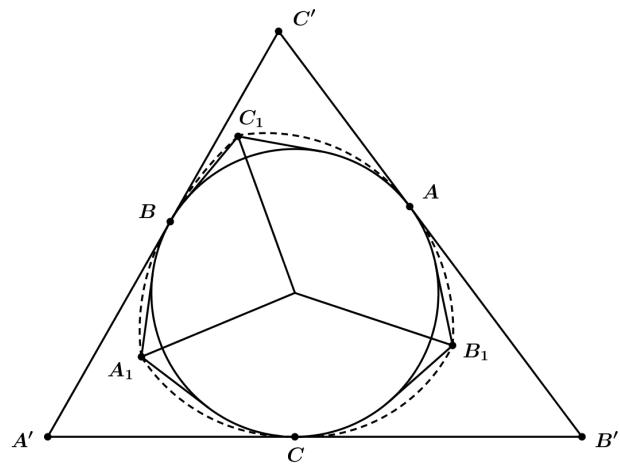


Рис. 29:

проводить из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  касательные к окружности.

Дальше можно действовать двумя способами. Можно представить площадь  $S$  как функцию от радиуса, взять производную и показать, что минимум достигается при  $r = \frac{1}{3}$ . Но мы докажем теорему используя геометрические соображения.

Фигура  $S$  состоит из круга и трёх «шапочек». Площадь «шапочек» зависит только от расстояния от центра окружности до вершины «шапочки», поэтому можно считать, что углы между  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  равны  $120^\circ$ .

Если окружность касается границы в трёх точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то также как и в доказательстве свойства 4 рассмотрим треугольник  $A'B'C'$ . Поскольку полоса, параллельная касательной в точке  $A$  и содержащая фигуру  $F$ , имеет ширину не меньше 1, то на участке границы между точками  $B$  и  $C$  есть точка  $A_1$ , расположенная на расстоянии  $1 - r$  от центра окружности (см. Рис. 29). Действительно, если рассмотреть точку пересечения границы и прямой  $OA$  ( $O$  — центр вписанной окружности), то расстояние от неё до центра не меньше  $1 - r$ , а для точки  $B$  расстояние равно  $r$ , что не больше  $1 - r$ . Отсюда из соображений непрерывности получаем существование точки  $A_1$ . Аналогично определим точки  $B_1$  и  $C_1$ . Поскольку  $F$  выпуклая, она содержит выпуклую оболочку  $S$  точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и вписанной окружности. Чтобы построить  $S$ , нужно

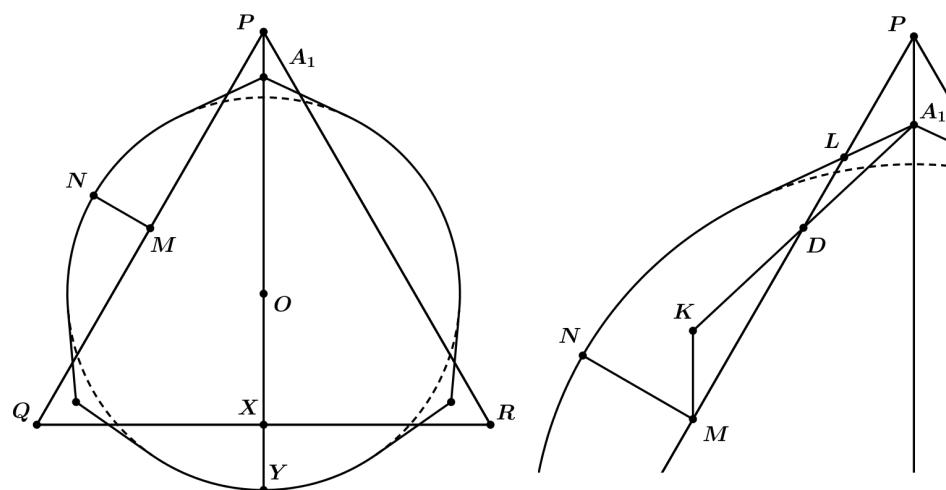


Рис. 30:

Рассмотрим правильный треугольник  $PQR$  ширины 1 и наложим на него  $S$  так, чтобы центр  $S$  совпал с центром треугольника, а точки  $A_1, B_1, C_1$  попали на соответствующие высоты (см. Рис. 30). Покажем, что площадь треугольника  $PQR$  меньше площади  $S$ . Пусть  $M$  — середина  $PQ$ ,  $N$  — точка пересечения прямой  $OM$  с границей  $S$ ,  $L$  — точка пересечения границы  $S$  со стороной  $PQ$ , ближайшая к точке  $P$ . Покажем, что треугольник  $PLA_1$  можно разместить в криволинейном треугольнике  $MNL$ . Поскольку часть треугольника  $PQR$ , не попавшая в  $S$  состоит из шести таких треугольников, то этот факт завершит доказательство теоремы Пала. Пусть прямая  $PA_1$  пересекает прямую  $QR$  в точке  $X$ , а фигуру  $S$  вторично в точке  $Y$ . Поскольку  $A_1Y > PX = 1$ , то  $PA_1 < XY = MN$ . Проведём из точки  $M$  отрезок  $MK$ , равный и параллельный отрезку  $PA_1$ . Поскольку  $PA_1 < MN$ , то  $K$  попадёт внутрь криволинейного треугольника  $MNL$ . Пусть отрезки  $A_1K$  и  $PM$  пересекаются в точке  $D$ . Тогда треугольники  $MKD$  и  $PA_1D$  равны, поскольку  $MKPA_1$  — параллелограмм. Но треугольник  $PA_1L$  лежит внутри треугольника  $PA_1D$ , т.е. его можно разместить внутри треугольника  $MKD$ , который, в свою очередь, лежит внутри криволинейного треугольника  $MNL$ , что мы и хотели.

**Замечание.** В пространстве точная оценка объёма фигуры через её ширину неизвестна. Известно, что объём фигуры ширины  $\omega$  не меньше  $\frac{2}{9}\omega^3$  (см. [12]), что, по-видимому, является наилучшей известной на данный момент оценкой.

## 7 Задача Какея

Доказанная теорема Пала связана с интересным вопросом, заданным в 1917 году японским математиком Какея: какова наименьшая площадь фигуры, внутри которой можно развернуть на  $360^\circ$  иголку единичной длины? Ясно, что иголка должна помещаться в фигуре в каждом направлении, поэтому ширина фигуры должна быть не меньше 1. Следовательно, если фигура выпуклая, то ответ на задачу даёт теорема Пала — наименьшей площадью обладает равносторонний треугольник ширины 1. Собственно, Пал решал именно задачу Какея. Без условия выпуклости ответ на вопрос Какея весьма неожиданный. Сам Какея предположил, что ответом является дельтоида — фигура, границу которой рисует точка окружности диаметра  $\frac{1}{2}$ , катящаяся по окружности диаметра  $\frac{3}{2}$  (см. Рис. 31). Площадь этой фигуры равна  $\frac{\pi}{8}$ .

Однако, оказалось, что существует такая фигура сколь угодно маленькой площади. Рассмотрим произвольный треугольник  $ABC$ . Разобъём сторону  $BC$  на  $n$  равных частей точками  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ . Покажем существование такого  $n$ , что можно сдвинуть параллельно прямой  $BC$  треугольники вида  $AA_iA_{i+1}$  (считаем, что  $A_0 = B, A_n = C$ ) так, чтобы площадь фигуры, полученной объединением этих треугольников, была сколь угодно мала. Разделим высоту треугольника  $ABC$ , опущенную из вершины  $A$ , на  $m + 2$  равных части. Проведём через точки деления прямые  $l_0, l_1, \dots, l_m$ , параллельные  $BC$  ( $l_0$  — самая близкая к вершине  $A$  прямая, а  $l_m$  — самая близкая к  $BC$  прямая). Через  $l_{m+1}$  обозначим  $BC$  (см. Рис. 32).

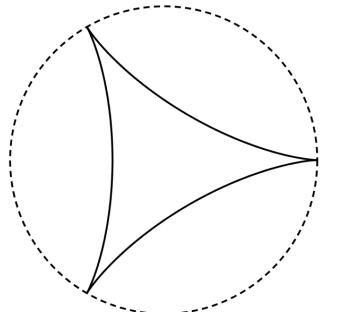


Рис. 31:

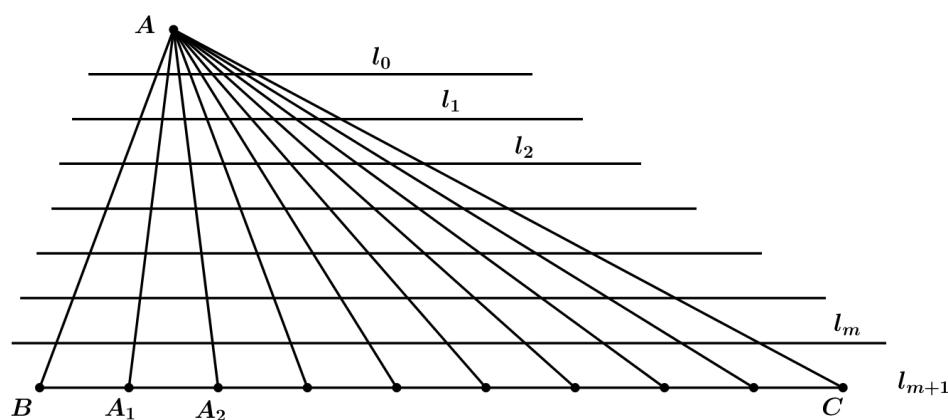


Рис. 32:

Для начала поймём, в чём состоит идея доказательства. Каждый треугольник разбивается прямыми  $l_0, \dots, l_{m+1}$  на треугольник и несколько трапеций. Пусть  $a_i$  — сумма длин отрезков на прямой  $l_i$ . Если мы сдвигами треугольников добьёмся того, что  $a_i < \frac{\varepsilon}{h}$ , где  $h$  — высота треугольника, то общая площадь новой фигуры будет не больше  $\varepsilon$ . Действительно, площадь этой фигуры можно посчитать следующим образом:

$$\frac{a_0 h}{2(m+2)} + \frac{(a_0 + a_1)h}{2(m+1)} + \dots + \frac{(a_m + a_{m+1})h}{2(m+1)} \leq \frac{(a_0 + \dots + a_{m+1})h}{(m+1)} < \varepsilon.$$

Положим  $n = 2^m$ . Разобьём  $2^m$  треугольников на  $2^{m-1}$  пар:  $ABA_1$  и  $AA_1A_2$ ,  $AA_3A_4$  и  $AA_5A_6$ ,  $\dots$ ,  $AA_{2^{m-3}}A_{2^{m-2}}$  и  $AA_{2^{m-1}}C$ . Сдвинем треугольники так, чтобы в парах они пересекались по отрезкам, высекаемым ими на прямой  $l_1$ . Затем разобьём на пары полученные  $2^{m-1}$  пар. Сдвинем эти пары треугольников так, чтобы они пересекались по отрезкам, высекаемых ими на прямой  $l_2$ . Далее будем проделывать ту же самую операцию для прямых  $l_3, \dots, l_m$  (см. Рис. 33). Докажем, что мы всегда это сможем сделать и посчитаем суммарную длину отрезков на наших прямых.

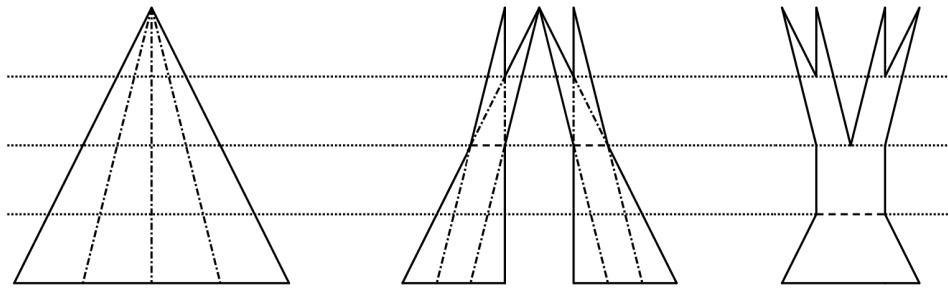


Рис. 33:

Изначально длина отрезков на  $l_1$ , которые высекает каждый из треугольников, равна  $\frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ , где  $a$  — длина стороны  $BC$ . После сдвигов количество отрезков на прямой  $l_1$  уменьшится в 2 раза, поэтому суммарная длина будет равна  $\frac{a}{m+2}$ . При дальнейших преобразованиях суммарная длина отрезков не увеличивается, поэтому в итоге она не будет превосходить  $\frac{a}{m+2}$ .

Посмотрим на отрезки на прямой  $l_2$ . Изначально их  $2^m$ , длина каждого из них равна  $\frac{3}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ . Посмотрим на треугольники  $ABA_1$  и  $AA_1A_2$ . Отрезки, высеченные ими на  $l_2$ , образуют отрезок длины  $\frac{6}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ . После первого сдвига его длина уменьшится на длину сдвига, т.е. на  $\frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ , поэтому будет равна  $\frac{4}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ . Понятно, что для любой другой пары треугольников длина отрезка будет такой же. После второго сдвига отрезков будет  $2^{m-2}$ , поэтому их суммарная длина будет равна  $\frac{a}{m+1}$ . При дальнейших сдвигах суммарная длина не увеличивается, поэтому в итоге она не будет превосходить  $\frac{a}{m+2}$ .

Посмотрим на отрезки на прямой  $l_3$ . Изначально их  $2^m$ , длина каждого из них равна  $\frac{4}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ . После первого сдвига отрезков станет  $2^{m-1}$ , длина каждого будет равна

$$2 \cdot \frac{4}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} - \frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} = \frac{6}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}.$$

Рассмотрим, что происходит после второго сдвига. Поскольку первая четвёрка треугольников и вторая четвёрка треугольников содержат соседние треугольники, то совмещение четвёрок можно представлять следующим образом: сначала два соседних треугольника совмещаются по равной стороне, после чего они сдвигаются на нужную длину. Поэтому после второго сдвига число отрезков будет  $2^{m-2}$ , а их длина будет равна

$$2 \cdot \frac{6}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} - \frac{4}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} = \frac{8}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}.$$

После третьего сдвига число отрезков станет равно  $2^{m-3}$ , поэтому суммарная длина будет равна  $\frac{a}{m+2}$ .

Продолжая таким образом, мы получим, что сумма отрезков на каждой прямой не больше  $\frac{a}{m+2}$ . Приведём формальное доказательство этого факта.

Индукцией по  $i$  покажем, что для любого  $k$  на  $k$ -ой прямой после  $i$  сдвигов ( $i \leq k$ ) будет  $2^{m-i}$  отрезков, суммарная длина которых будет равна  $\frac{2^i(k-i+1)}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ . База для  $i = 1$ . После первого сдвига на  $l_k$  будет  $2^{m-1}$  отрезок, длина каждого из которых будет равна

$$2 \cdot \frac{k+1}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} - \frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} = \frac{2k}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}.$$

Пусть утверждение верно для всех чисел меньших  $i$ , докажем для  $i$ . После  $i$  сдвигов на прямой  $l_i$  будут расположены отрезки длины  $\frac{2^i}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ , на эту величину будет происходить  $i$ -ый сдвиг. Посмотрим на прямую  $l_k$ . Перед  $i$ -ым сдвигом на ней расположены  $2^{k-i-1}$  отрезков, длина каждого из которых равна  $\frac{2^{i-1}(k-i+2)}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ . После  $i$ -ого сдвига на ней будет  $2^{m-i}$  отрезков, длина каждого из которых равна

$$2 \cdot \frac{2^{i-1}(k-i+2)}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} - \frac{2^i}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} = \frac{2^i(k-i+1)}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m},$$

что доказывает переход индукции.

После  $k$  сдвигов на  $l_k$  суммарная длина отрезков будет равна

$$2^{m-k} \cdot \frac{2^k}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} = \frac{a}{m+2},$$

что мы и хотели доказать.

Посчитаем теперь общую площадь фигуры. Она не превосходит

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{m+2} \cdot \frac{h}{m+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{m+2} \cdot \frac{h}{m+2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{m+2} \cdot \frac{h}{m+2} < \frac{ah}{m+2}.$$

При больших  $m$  эту величину можно сделать сколь угодно маленькой.

Пусть теперь  $h \geq 1$ . Покажем, как модифицировать нашу фигуру, полученную из треугольника  $ABC$  в результате всех сдвигов, так, чтобы внутри неё можно было повернуть единичную иголку из положения на стороне  $AB$  до положения на стороне  $AC$ . Рассмотрим 2 треугольника  $AX_1X_2$  и  $A'X_3X_4$ , которые раньше были соседними (т.е. отрезок  $AX_2$  равен и параллелен отрезку  $A'X_3$ , отрезки  $X_1X_2$  и  $X_3X_4$  также параллельны и равны). Внутри каждого из них иголку свободно можно вращать из положения на одной стороне (с вершиной в точке  $A$  или  $A'$ ) до положения на другой стороне (также с вершиной в точке  $A$  или  $A'$ ). Проведём внутри треугольника  $AX_1X_2$  прямую  $AY$ , образующую малый угол с прямой  $AX_2$  (и с  $A'X_3$  соответственно). Пусть прямые  $AY$  и  $A'X_3$  пересекаются в точке  $O$ . (На Рис. 34 треугольники изображены не пересекающимися для удобства чертежа, на самом деле они пересекаются).

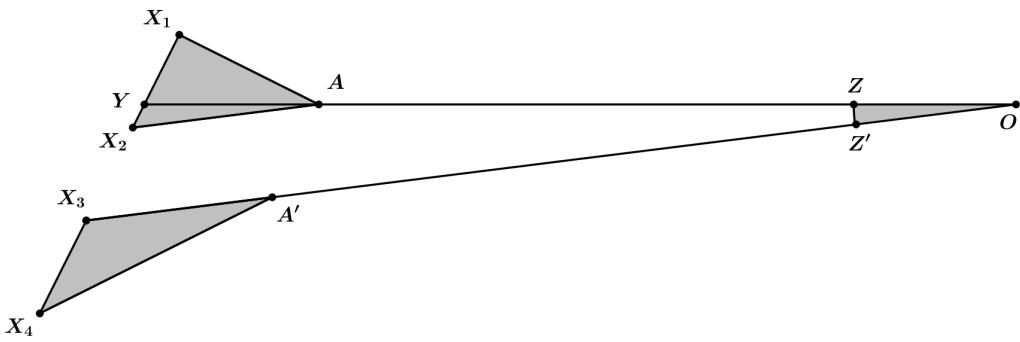


Рис. 34:

Проведём единичную окружность с центром в точке  $O$ , пусть она пересекает прямые  $AY$  и  $A'X_3$  в точках  $Z$  и  $Z'$  соответственно. Добавим к нашей фигуре сектор  $OZZ'$ . Теперь нашу иглу можно в треугольнике  $AX_1X_2$  повернуть от стороны  $AX_1$  до прямой  $AY$ , затем по прямой  $AY$  перенести до отрезка  $OZ$ , повернуть до отрезка  $OZ'$ , по прямой  $A'X_3$  переместить в треугольник  $A'X_3X_4$ , где повернуть до отрезка  $A'X_4$ . Поскольку угол  $ZOZ'$  можно сделать сколь угодно малым, то и прибавка к площади сколь угодно малая.

Сделаем теперь указанное построение для всех соседних пар треугольников. Получим, что внутри получившейся фигуры мы сможем повернуть иголку от положения, параллельного изначальной стороне  $AB$ , до положения, параллельного изначальной стороне  $AC$ . Рассмотрим треугольник  $ABC$ , у которого радиус вписанной окружности равен 1. Пусть  $I$  — центр его вписанной окружности. Для треугольников  $AIB$ ,  $BIC$ ,  $CIA$  выполним наше построение. Если теперь соединить получившиеся фигуры (фигуры, полученные из треугольников  $AIB$  и  $BIC$  по стороне  $BI$ , треугольники  $BIC$  и  $CIA$  по стороне  $CI$ ), то получим фигуру, в которой можно повернуть иголку на  $360^\circ$ .

Фигура, которая получается в примере, довольно некрасивая, а постановка задачи такова, что хочется получить какую-нибудь наглядную фигуру. В нашем примере у фигуры получается очень большой диаметр, однако можно привести пример фигуры, которая целиком лежит в круге радиуса 1 (см. [14]). Это можно попытаться сделать, если добавить условие, что фигура должна быть *звёздной*, т.е. внутри фигуры должна существовать точка, из которой видна любая точка границы. Для этих множеств вопрос до сих пор открыт. Известно, что площадь такого множества должна быть не меньше  $\frac{\pi}{108}$  (см. [14]). Также известен пример последовательности звёздных множеств, площади которых стремятся к  $\frac{5-2\sqrt{2}}{24}\pi$  (см. [15]).

Рассмотрим вершины правильного  $(2n+1)$ -угольника  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ , расположенные в указанном порядке по часовой стрелке на окружности  $\omega$  с центром в точке  $O$ . Рассмотрим вершину  $A_1$  и отсчитаем  $n$  вершин по часовой стрелке, получим вершину  $A_{n+1}$ . Проведём к  $\omega$  касательные в точках  $A_1$  и  $A_{n+1}$ , пусть они пересекутся в точке  $X$ . Проведём окружность с центром в точке  $X$  и радиусом  $XA_1$ . Подберём радиус окружности  $\omega$  таким образом, чтобы внутри криволинейного треугольника  $OA_1A_{n+1}$  можно было бы повернуть иголку из положения на стороне  $OA_1$  до положения на стороне  $OA_{n+1}$ . Далее от вершины  $A_{n+1}$  снова отсчитаем  $n$  вершин, получим вершину  $A_{2n+1}$ . Для этих двух вершин выполним аналогичное построение, получим криволинейный треугольник  $OA_{n+1}A_{2n+1}$ . Далее «шагая» по  $n$  вершинам, построим  $2n+1$  криволинейных треугольников. Их объединение и будет нашей искомой фигурой.

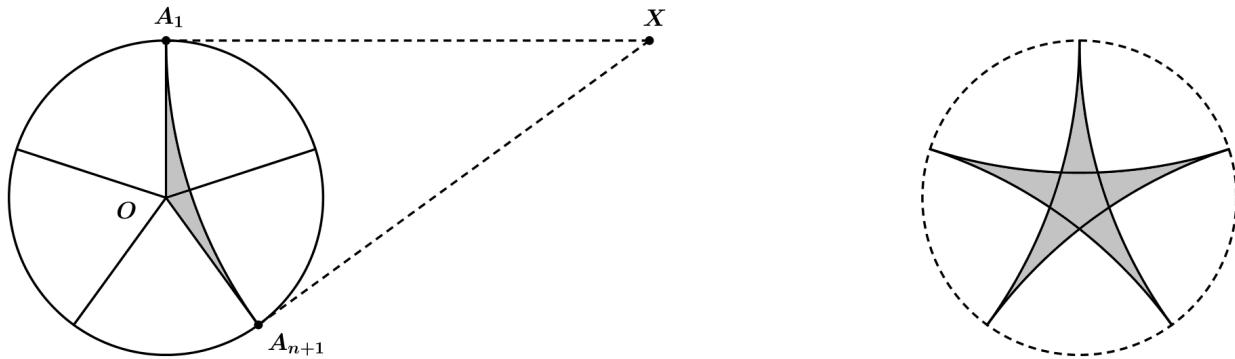


Рис. 36:

## 8 Теорема Кадеца

В 2003 году В. М. Кадец [17] доказал следующую теорему.

**Теорема Кадеца.** *Выпуклая фигура  $F$  покрыта выпуклыми фигурами  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Тогда радиус вписанной окружности  $F$  меньше, чем сумма радиусов вписанных окружностей  $F_1, \dots, F_n$ .*

**Упражнение.** *Докажите теорему Кадеца в случае, если  $F$  — выпуклый многоугольник, а  $F_1, \dots, F_n$  — треугольники.*

Из теоремы Кадеца вытекает теорема Банга-Тарского для круга — в качестве  $F$  нужно взять

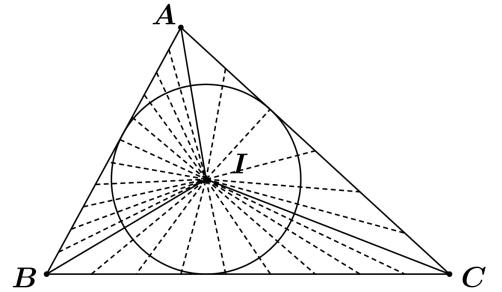
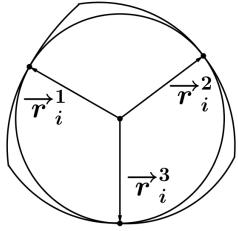


Рис. 35:

единичный круг, а в качестве  $F_1, \dots, F_n$  — полосы.

**Доказательство теоремы Кадеца.** Поскольку вписанный круг  $F$  также покрыт выпуклыми фигурами  $F_1, \dots, F_n$ , то можно считать, что  $F$  — это единичный круг. Обозначим через  $O$  его центр. Для простоты изложения будем считать, что  $F, F_1, \dots, F_n$  — открытые фигуры, т.е. не содержат своей границы.



Можно считать, что каждая  $F_i$  — это треугольник или полоса. Действительно, проведём касательные в точках касания вписанной окружности  $F_i$  с границей  $F_i$ , они образуют треугольник или полосу. При этом образовавшаяся фигура содержит  $F_i$  и имеет такой же радиус вписанной окружности. Через  $O_i$  обозначим центр вписанной окружности  $F_i$  (если  $F_i$  — это полоса, то выберем любую из вписанных окружностей).

Пусть  $\vec{r}_i^1, \vec{r}_i^2, \vec{r}_i^3$  — это вектора, соединяющие  $O_i$  с точками касания окружности с границей (см. Рис. 37). Если точек касания не три, а две, то векторов будет всего

Рис. 37: два.

Рассмотрим случай, когда каждая  $F_i$  является треугольником (случай, когда в покрытии присутствуют полосы, аналогичен). Рассмотрим  $3^n$  сумм вида  $\sum_{i=1}^n \vec{r}_i^{\alpha_i}$ , где  $\alpha_i$  равно 1, 2 или 3. То есть это множество точек устроено следующим образом: от точки  $O$  откладываются 3 вектора  $\vec{r}_1^1, \vec{r}_1^2, \vec{r}_1^3$ , затем от каждой из трёх получившихся точек откладываются вектора  $\vec{r}_2^1, \vec{r}_2^2, \vec{r}_2^3$  и т.д. (см. Рис. 38). Поскольку сумма радиусов меньше 1, все полученные точки будут лежать внутри  $F$ . Получившуюся конфигурацию будем называть *остовом*. Без ограничения общности можно считать, что все точки различны (т.е. никакая линейная комбинация  $a_1 \vec{r}_1^{\alpha_1} + a_2 \vec{r}_2^{\alpha_2} + \dots + a_n \vec{r}_n^{\alpha_n}$ , где  $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ , не будет равна 0), иначе можно каждую фигуру гомотетично увеличить так, чтобы все точки были различны, а сумма радиусов вписанных окружностей по-прежнему была меньше 1.

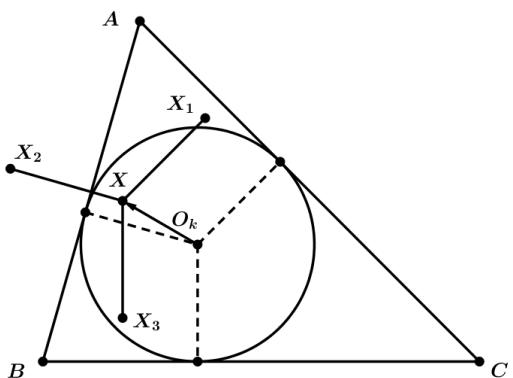


Рис. 39:

Возьмём произвольную вершину остова  $X_1$  такую, что  $\overrightarrow{OX_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i^{\alpha_i}$ . Пусть она покрыта треугольником  $F_k$ . Без ограничения общности  $\alpha_k = 1$ . Рассмотрим вершины остова  $X_2$  и  $X_3$  такие, что в их линейных комбинациях вектор  $\vec{r}_k^1$  заменён на  $\vec{r}_k^2$  и  $\vec{r}_k^3$  соответственно. Так же рассмотрим точку  $X$ , такую что  $\overrightarrow{XX_1} = \vec{r}_k^1$ . Понятно, что тройка точек касания вписанной окружности с границей  $F_k$  переходит в точки  $X_1, X_2, X_3$  при переносе на вектор  $\overrightarrow{O_kX}$  (см. Рис. 39). При таком параллельном переносе хотя бы одна из точек касания перейдёт в точку вне  $F_k$ . В эту точку и перейдёт из вершины  $X_1$ . Далее будем проделывать эту же операцию. Определим следующую величину:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \vec{r}_j^{\alpha_j}) - \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \overrightarrow{OO_i}).$$

Докажем, что она возрастает при наших переходах из вершины в вершину. Из этого будет следовать, что мы не сможем вернуться в вершину, в которой мы уже были. Рассмотрим один такой переход. Без ограничения общности, в линейной комбинации вектор  $\vec{r}_n^1$  изменился на  $\vec{r}_n^2$ . Выделим в  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  слагаемые, зависящие от  $\vec{r}_n^{\alpha_n}$ :

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \vec{r}_j^{\alpha_j}) + \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \vec{r}_n^{\alpha_n}) - \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \overrightarrow{OO_i}) - (\vec{r}_n^{\alpha_n}, \overrightarrow{OO_n}).$$

Если записать разность  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 2) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ , то первая и третья суммы у них

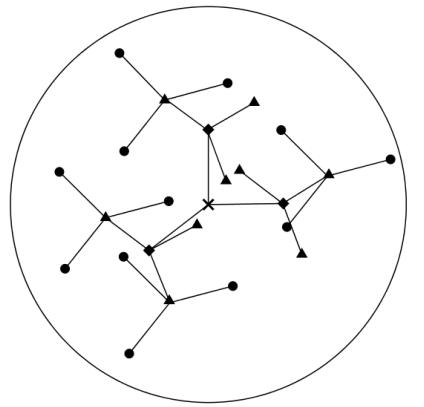


Рис. 38:

сократятся, поэтому останется

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 2) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \vec{r}_n^2) - \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \vec{r}_n^1) \right) - \\ - \left( (\vec{r}_n^2, \overrightarrow{OO_n}) - (\vec{r}_n^1, \overrightarrow{OO_n}) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{r}_i^{\alpha_i}, \vec{r}_n^2 - \vec{r}_n^1) - (\vec{r}_n^2 - \vec{r}_n^1, \overrightarrow{OO_n}) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \vec{r}_i^{\alpha_i} - \overrightarrow{OO_n}, \vec{r}_n^2 - \vec{r}_n^1 \right).$$

Рассмотрим треугольник,  $F_n$ , из которого мы вышли, обозначим его  $ABC$ . Пусть точки касания его вписанной окружности со сторонами  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  — это точки  $C_1$ ,  $B_1$  и  $A_1$  соответственно, причём  $\overrightarrow{O_nB_1}$  и  $\overrightarrow{O_nC_1}$  сонаправлены векторам  $\vec{r}_i^1$  и  $\vec{r}_i^2$  соответственно. Обозначим через  $X_1$  вершину острова, из которой мы уходили, а через  $X_2$  — вершину острова, в которую мы пришли. Пусть  $X$  такая точка, что  $\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{r}_i^{\alpha_i}$ . Поскольку  $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{O_nB_1}$ ,  $\overrightarrow{XX_2} = \overrightarrow{O_nC_1}$ , то треугольники  $XX_1X_2$  и  $O_nB_1C_1$  равны, т.е.  $X_1X_2$  равно и параллельно  $B_1C_1$  (см. Рис. 40).

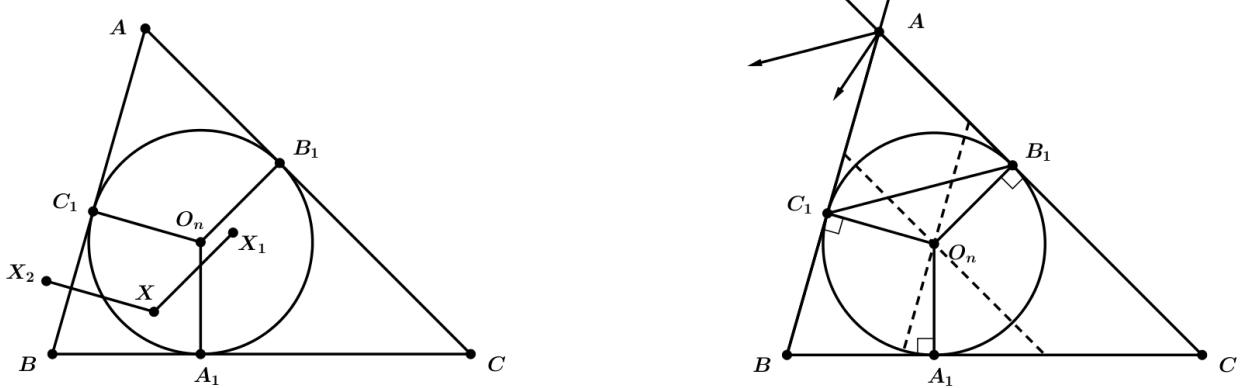


Рис. 40:

Поскольку  $\sum_{i=1}^{n-1} \vec{r}_i^{\alpha_i} - \overrightarrow{OO_n} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO_n} = \overrightarrow{O_nX}$ ,  $\vec{r}_n^2 - \vec{r}_n^1 = \overrightarrow{X_1X_2}$ , то достаточно показать, что угол между векторами  $\overrightarrow{O_nX}$  и  $\overrightarrow{C_1B_1}$  острый. Проведём через точку  $O_n$  прямые  $l_b$  и  $l_c$ , параллельные  $AC$  и  $AB$  соответственно. Поскольку точка  $X_1$  лежит внутри треугольника, то  $X$  лежит с той же стороны относительно  $l_b$ , что и точка  $B$ . Поскольку точка  $X_2$  лежит вне треугольника, то точка  $X$  лежит с той же стороны относительно  $l_c$ , что и точка  $B$ . Перенесём векторы  $O_nX$  и  $C_1B_1$  так, чтобы их начало совпадало с точкой  $A$ . Из высказанного следует, что вектор  $O_nX$  будет направлен во внешний угол  $A$  треугольника  $ABC$ , а вектор  $C_1B_1$  — вдоль биссектрисы этого же внешнего угла. Поэтому угол между векторами меньше, чем угол между внешней и внутренней биссектрисой, который равен  $90^\circ$ .

## 9 Фигуры с дырками

Рассмотрим такой вопрос. Кажется интуитивно очевидным, что если из единичного круга вырезать маленький концентрический круг, то полученную фигуру не удастся покрыть полосами, суммарная ширина которых меньше 1. Однако, это нерешённая задача.

В общей постановке вопрос звучит так: для каких выпуклых фигур  $F$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что если в  $F$  вырезать дырку, полученную из  $F$  гомотетией с коэффициентом  $\varepsilon$ , то у любого покрытия полученной фигуры полосами сумма ширин полос не меньше ширины  $F$ .

Все выпуклые многоугольники, для которых такое  $\varepsilon$  существует, описаны в [19]. Точное значение  $\varepsilon$  не известно ни для какой фигуры. Известно, что для квадрата точное значение  $\varepsilon \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  (см. [11]).

**Теорема.** *Если из единичного квадрата вырезан квадрат со стороной не больше, чем  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ , стороны которого параллельны сторонам единичного квадрата, то полученную фигуру нельзя покрыть*

полосами, суммарная ширина которых меньше 1.

**Доказательство.** Обозначим исходный квадрат через  $X$ , а вырезанный квадрат через  $Y$ . Рассмотрим покрытие  $X \setminus Y$  полосами  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Пусть их суммарная ширина меньше 1. Построим по полосам соответствующий остов (длина каждого вектора больше ширины соответствующей полосы). Без ограничения общности можно считать, что он невырожденный (этого можно добиться шевелением длин векторов). Рассмотрим границу остова и проведём опорные прямые этого многоугольника, параллельные сторонам квадрата, получим прямоугольник  $PQRS$ , содержащий остов (см. Рис. 41). Поскольку вектор  $\overrightarrow{AC}$ , соединяющий две вершины остова на противоположных сторонах  $PQ$  и  $SR$  соответственно, равен сумме  $b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \dots + b_n \vec{v}_n$  ( $b_i \in \{-1, 0, 1\}$ ), то  $|\overrightarrow{AC}| < 1$ , так как сумма длин векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  меньше 1.

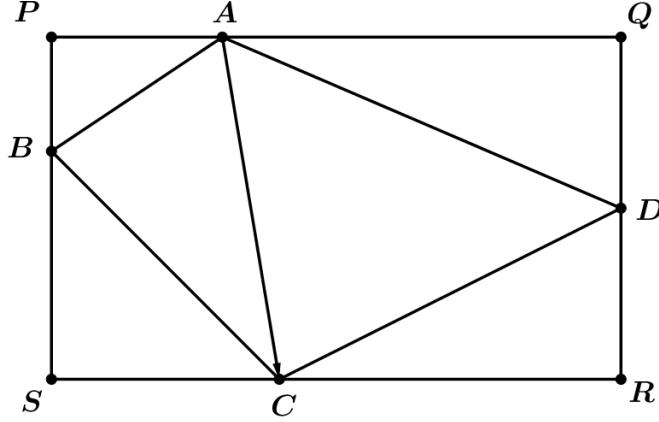


Рис. 41:

Отсюда следует, что стороны прямоугольника  $PQRS$  меньше 1, т.е. его (а, следовательно, и остов) можно поместить в квадрат  $X$ . Докажем, что длина одной из сторон прямоугольника не превосходит  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Выберем вершины  $B$  и  $D$  на двух других сторонах прямоугольника, тогда периметр четырёхугольника  $ABCD$  не превосходит 2, поскольку периметр границы остова не больше 2. По неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим

$$\sqrt{\frac{AP^2 + BP^2}{2}} \geq \frac{AP + BP}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{AB^2}{2}} \geq \frac{AP + BP}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}AB \geq AP + BP.$$

Отсюда периметр прямоугольника  $PQRS$  не превосходит  $2\sqrt{2}$ , т.е. найдётся сторона, не превосходящая  $\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Без ограничения общности это сторона  $PS$ .

Рассмотрим новую полосу  $S_{n+1}$  ширины  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Разместим прямоугольник  $PQRS$  так, чтобы его левый верхний угол совпал с левым верхним углом исходного квадрата  $X$ . Рассмотрим новый остов, построенный по полосам  $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ . Он отличается от остова, построенного по полосам  $S_1, S_2, \dots, S_n$  добавлением одной вертикальной стороны длины  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ , поэтому этот остов помещается внутрь квадрата. Параллельно передвинем полосу  $S_{n+1}$  так, чтобы она покрыла вырезанный квадрат  $Y$  (остов при этом не изменится). По лемме Банга полосы  $S_1, \dots, S_{n+1}$  не покрывают весь остов. Но вырезанный квадрат  $Y$  покрыт, поэтому непокрытая вершина остова лежит в  $X \setminus Y$ , т.е.  $X \setminus Y$  не покрыта полностью, противоречие.

## 10 Упражнения

1. Докажите, что если сумма ширин двух полос равна 2, то любой квадрат со стороной 1 можно покрыть параллельными сдвигами этих полос. Можно ли уменьшить число 2, чтобы утверждение задачи осталось верным?
2. а) Найдите ширину полукруга радиуса 1.  
б) Докажите, что если единичный круг разрезали прямой на 2 части, то сумма ширин этих частей равна 2.
3. Единичный квадрат разрезан на несколько прямоугольников. Докажите, что суммарная ширина прямоугольников не меньше 1.
4. Дан правильный  $2n$ -угольник, длина стороны которого равна 1. Для каждой пары параллельных сторон рассмотрим перпендикулярную им полосу, ширина которой равна 1. Какой наибольший правильный  $2n$ -угольник можно покрыть параллельными переносами этих полос?
5. Докажите, площадь треугольника меньше, чем площадь любой другой выпуклой фигуры той же ширины и диаметра.
6. В круге радиуса  $R$  расположен другой круг радиуса  $r$ . Сколько прямых надо провести, чтобы наверняка пересечь маленький круг?
7. а) На плоскости дано несколько векторов, сумма которых равна 0. Докажите, что из них можно составить единственный выпуклый многоугольник.  
б) Докажите, что остав векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  можно получить следующим образом. Из векторов  $\pm \vec{v}_1, \pm \vec{v}_2, \dots, \pm \vec{v}_n$  составить выпуклый многоугольник, для этого многоугольника рассмотрим все его разбиения на параллелограммы со сторонами, параллельными и равными сторонам многоугольника, и изобразим их на одной картинке. Тогда получится остав.
8. Дан центрально-симметричный выпуклый  $2n$ -угольник. Для каждой пары симметричных сторон рассмотрим полосу, ширина которой равна длине сторон, а стороны перпендикулярны сторонам. Всегда ли многоугольник можно покрыть сдвигами полос, если а)  $n = 3$ ; б\*)  $n$  — произвольное?
9. Дан описанный многоугольник и окружность, которая касается всех его сторон. Докажите, что эта окружность — вписанная для данного многоугольника (по нашему определению).

# Список литературы

- [1] А. Акопян, *Вокруг задачи Банга–Тарского о покрытии полосками*, Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике, 3 апреля 2013, [http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option\\_lang=rus&presentid=6581](http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=6581)
- [2] В. И. Арнольд, *В школьном математическом кружке при МГУ*, Матем. просв., сер. 2, **2** (1957), 241–245.
- [3] Г. Радемахер, О. Теплиц, *Числа и фигуры*, М.: Гостехиздат, 1962.
- [4] М. Смуров, А. Спивак, *Покрытие полосками*, Квант **4** (1998), 17–22.
- [5] М. Смуров, А. Спивак, *Покрытие полосками*, Квант **5** (1998), 6–12.
- [6] А. Храбров, *Задача о дощечках*, в Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2009 года/Сост.: А. И. Храбров, К. П. Кохась, Ф. В. Петров и др., Спб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2009, 114–146.
- [7] И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры*, М.: Гостехиздат, 1951.
- [8] R. Alexander, *A problem about lines and ovals*, Amer. Math. Monthly **75/5** (1968), 482–487.
- [9] K. Ball, *The plank problem for symmetric bodies*, Invent. Math. **104/3** (1991), 535–543.
- [10] T. Bang, *A solution of the "plank problem"*, Proc. Amer. Math. Soc. **2/6** (1951), 990–993.
- [11] A. Bezdek, *Covering an annulus by strips*, Discrete Comput. Geom. **30** (2003), 177–180.
- [12] K. Bezdek, *Tarski's Plank Problem Revisited*, in Geometry — Intuitive, Discrete, and Convex, I. Bárány, K. J. Böröczky, G. F. Tóth, J. Pach, eds., Springer, 2013, 45–64.
- [13] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
- [14] F. Cunningham, *The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 114–129.
- [15] F. Cunningham, I. J. Schoenberg, *On the Kakeya constant*, Canad. J. Math. **17** (1965), 946–956.
- [16] J. W. Green, *On the determination of a function in the plain by its integrals over straight lines*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 758–762.
- [17] V. M. Kadets, *Weak cluster points of a sequence and coverings by cylinders*, Матем. физ., анал., геом. **11/2** (2004), 161–168.
- [18] A. Soifer, *Geometric etudes in combinatorial mathematics*, Springer, 2010.
- [19] S. White, L. Wisewell, *Covering Polygonal Annuli by Strips*, Discrete Comput. Geom. **37** (2007), 577–585.