# Задачи к курсу «Покрытие полосами»

*Для получения зачёта необходимо набрать $\geqslant M$ баллов за задачи первой части и $\geqslant N$ баллов за задачи второй части. Точные значения $M$ и $N$ будут уточняться. Баллы за дополнительные задачи можно зачесть как баллы части 1. Решение любой из совсем дополнительных задач гарантирует зачёт.*

## Часть 1

1. (1) Докажите, что ширина треугольника равна его наименьшей высоте.

2. **a)** (1) Найдите ширину полукруга радиуса 1.
**b)** (1) Докажите, что если единичный круг разрезать прямой на две части, то сумма ширин этих частей будет равна 2.

3. (2) Докажите, что ширину выпуклого многоугольника можно найти следующим образом: для каждой стороны найти расстояние до наиболее удалённой от неё вершины, а затем среди этих расстояний выбрать наименьшее.

4. (2) Докажите, что неравносторонний треугольник можно разрезать прямой на две части так, чтобы сумма ширин частей была больше ширины исходного треугольника.

5. (1) Единичный квадрат разрезан на несколько прямоугольников. Докажите, что суммарная ширина прямоугольников не меньше 1.

6. (2) Докажите, что если сумма ширин двух полос равна 2, то любой квадрат со стороной 1 можно покрыть параллельными сдвигами этих полос. Можно ли уменьшить число 2, чтобы утверждение задачи осталось верным?

7. (1) Докажите, что без условия выпуклости фигуры гипотеза Тарского неверна.

8. (3) Завершите доказательство гипотезы Тарского для двух полос.

9. **a)** (1) На плоскости дано несколько векторов, сумма которых равна 0. Докажите, что из них можно составить единственный выпуклый многоугольник.
**b)** (1) Докажите, что если для каждой стороны выпуклого многоугольника найдётся равная и параллельная ей, то многоугольник имеет центр симметрии. Верно ли это утверждение для невыпуклых многоугольников?
**c)** (2) Докажите, что остов векторов $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ можно получить следующим образом: из векторов $\pm\overrightarrow{v_1}, \pm\overrightarrow{v_2}, \ldots, \pm\overrightarrow{v_n}$ составить выпуклый многоугольник, для этого многоугольника рассмотреть всевозможные его разбиения на параллелограммы со сторонами, параллельными и равными сторонам многоугольника, и изобразить все разбиения на одной картинке.

# Задачи к курсу «Покрытие полосами»

## Часть 2

1. (1) В круге радиуса $R$ расположен другой круг радиуса $r$. Сколько прямых надо провести, чтобы наверняка пересечь маленький круг?

2. (2) Докажите, что утверждение «Если суммарная ширина множества полос на плоскости не меньше $\lambda$, то единичный круг можно покрыть параллельными переносами этих полос» неверно, если $\lambda < \pi$. (Воспользуйтесь тем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся правильный $n$-угольник, вписанный в единичную окружность, периметр которого заключён между $2\pi - \varepsilon$ и $2\pi$.)

3. (5) Докажите, что если из квадрата со стороной 1 вырезать квадрат со стороной не больше, чем $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, стороны которого параллельны сторонам единичного квадрата, то полученную фигуру нельзя покрыть полосами, суммарная ширина которых меньше 1. (Воспользуйтесь леммой Банга.)

4. Дан центрально-симметричный выпуклый $2n$-угольник. Для каждой пары симметричных сторон рассмотрим полосу, ширина которой равна длине этих сторон, а стороны полосы перпендикулярны этим сторонам $2n$-угольника. Всегда ли этот многоугольник можно покрыть сдвигами полос, если
   **a)** (2) $n = 3$; **b*)** (7) $n$ — произвольное?

5. (5) Докажите равносильность гипотез Банга и Дэвенпорта в общем случае.

6. Обозначим через $c_k(F)$ наибольшее положительное $c$ такое, что если выпуклая фигура $F$ покрыта несколькими полосами в $k$ слоёв, то сумма ширин полос не меньше $ck\omega$.
   **a)** (1) Найдите $c_2(F)$, если $F$ — квадрат.
   **b)** (1) Верно ли, что $c_2(F) = 5/6$, если $F$ — это правильный треугольник?
   **c)** (2) Найдите $c_k(F)$ для $k \geqslant 2$ и некоторой выпуклой фигуры $F$, отличной от круга и квадрата.

7. (2) Докажите, что площадь треугольника меньше, чем площадь любой другой выпуклой фигуры тех же ширины и диаметра.

# Задачи к курсу «Покрытие полосами»

## Дополнительные задачи

1. (3) Дан правильный $2n$-угольник, длина стороны которого равна 1. Для каждой пары параллельных сторон рассмотрим перпендикулярную им полосу, ширина которой равна 1. Какой наибольший правильный $2n$-угольник можно покрыть параллельными переносами этих полос?

2. Внутри правильного $n$-угольника $A$ расположено два правильных непересекающихся $n$-угольника $B$ и $C$. Докажите, что сумма периметров $B$ и $C$ не больше периметра $A$, если
**a)** (1) $n = 3$; **b)** (2) $n = 4$; **c)** (4) $n = 2k$; **d*)** (7) $n = 2k + 1$.

3. **a)** (1) Приведите пример бесконечного числа выпуклых фигур постоянной ширины 1.
**b)** (1) Приведите пример бесконечного числа выпуклых фигур постоянной ширины 1, у которых нет оси симметрии.
**c)** (3) Приведите пример выпуклой фигуры постоянной ширины, отличной от круга, в каждой точке границы которой можно провести ровно одну опорную прямую.

4. (1) Докажите, что каждая опорная прямая фигуры постоянной ширины пересекается с ней ровно в одной точке.

5. (3) Рассмотрим произвольную точку $A$ границы фигуры постоянной ширины $F$. Проведём в точке $A$ всевозможные опорные прямые. Наша фигура $F$ будет заключена внутри некоторого угла с вершиной в точке $A$. Докажите, что этот угол не может быть меньше $120°$.

6. (5) Фигура постоянной ширины $\omega$ составлена из дуг окружностей. Докажите, что длина её границы равна $\pi\omega$. (*Это утверждение верно для любой фигуры постоянной ширины $\omega$.*)

## Совсем дополнительные задачи

1. ($M$, $N$) В пространстве дано конечное число слоёв, сумма ширин которых равна $100^{100}$, и шар радиуса 1. При любом ли расположении слоёв каждый из них можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали шар?

2. ($M$, $N$) Найдите наименьшее $\lambda$, при котором верно следующее утверждение: «Если суммарная ширина множества полос на плоскости не меньше $\lambda$, то единичный круг можно покрыть параллельными переносами этих полос».

3. ($M$, $N$) Верно ли, что если выпуклая фигура покрыта несколькими полосами, то сумма их относительных ширин не меньше 1?

4. ($M$, $N$) Дана единичный круг и несколько полос, суммарная ширина которых меньше 2. Верно ли, что чтобы покрыть полосами наибольшую по площади часть круга, нужно полосы положить параллельно «встык» и их объединение положить симметрично относительно центра круга?

5. ($M$, $N$) Какова наименьшая площадь звездной фигуры, в которой можно развернуть единичную иголку на $360°$?

6. ($M$, $N$) Из единичного круга вырезали концентрический ему круг радиуса $r$. Можно ли подобрать $r > 0$ так, что оставшуюся фигуру нельзя покрыть полосами, сумма ширин которых меньше 2?