

IX Зимняя школа «Комбинаторика и алгоритмы»  
Даниил Мусатов, «Вычислительные задачи поиска»  
Список упражнений и задач №2: тотальные задачи поиска

Пусть задан полиномиальный алгоритм  $V(x, s)$ . Соответствующей ему задачей поиска называется задача нахождения по входу  $x$  любого  $s$ , такого что  $V(x, s) = 1$ , либо указания, что такого  $s$  нет. Класс задач поиска, для которых соответствующий  $s$  всегда существует, называется **TFNP**.

Классом **PPA** называется класс задач поиска, которые описываются так: в графе по одной вершине нечётной степени нужно найти другую вершину нечётной степени. Формально алгоритм получает на вход описание другого алгоритма  $N$  и слово  $z \in \{0, 1\}^m$ . Алгоритм  $N$  по слову из  $\{0, 1\}^n$  составляет полиномиальный список слов из  $\{0, 1\}^n$ . Ребро  $(x, y)$  проводится, если  $x \in N(y)$  и  $y \in N(x)$ . Задача состоит в том, что если  $z$  в построенном графе имеет нечётную степень, то нужно найти другую вершину  $w$  нечётной степени.

1. Докажите, что следующие задачи лежат в **PPA**:

- а) В ориентированном графе по одной вершине с нечётным балансом нужно найти другую вершину с нечётным балансом.
- б) Задача поиска по гамильтонову пути в графе, в котором все вершины имеют степень 3, *двух* других гамильтоновых циклов.
- в) В эйлеровом графе (степени всех вершин чётны) по одному совершенному паросочетанию (множеству непересекающихся рёбер, покрывающих все вершины) найти другое совершенное паросочетание.
- г) В эйлеровом графе по одному разбиению рёбер на непересекающиеся остовные деревья найти другое такое разбиение.
- д) В ориентированном графе по одной вершине с ненулевым балансом нужно найти другую вершину с ненулевым балансом.

2. Рассмотрим две задачи:

- В неориентированном *двудольном* графе по одной вершине, чья степень не сравнима с 0 по модулю  $p$ , найти другую такую вершину.
- В ориентированном графе по одной вершине, чей баланс не сравним с 0 по модулю  $p$ , найти другую такую вершину.

Докажите, что обе эти задачи лежат в **TFNP** и сводятся друг к другу. (Класс задач, которые к ним сводятся, называется **PPA**- $p$ ).

Классом **PPAD** называется класс задач поиска, которые описываются так: в ориентированном графе, в котором каждая вершина имеет входящую и исходящую степени не больше 1, нужно по одному источнику найти либо сток, либо другой источник. Классом **PPADS** называется класс задач, заданных так же, в которых нужно найти сток. Классом **PPP** называется множество задач поиска, которые описываются так: дано описание функции  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  и  $z \in \{0, 1\}^n$ . Требуется либо найти  $x$ , т.ч.  $f(x) = z$ , либо  $x \neq y$ , т.ч.  $f(x) = f(y)$ .

3. Рассмотрим задачу **EQUAL SUBSETS**: дан набор из  $n$  неотрицательных целых чисел, сумма которых меньше, чем  $2^n - 1$ . Требуется найти два подмножества с одинаковой суммой. Докажите формально, что эта задача лежит в **PPP**. (Т.е. постройте функцию  $f$ ).

4. Докажите, что **PPAD**  $\subset$  **PPA** и **PPAD**  $\subset$  **PPADS**  $\subset$  **PPP**.