1 Выразимость и игра Эренфойхта

1 Какова минимальная кванторная глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать свойство “в *связном* графе не существует индуцированного пути на трех вершинах” (т.е. не найдется таких различных вершин x, y, z, что $x \sim y$, $x \sim z$, $y \nsim z$)?

2 Какова минимальная кванторная глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать свойство “все компоненты связности графа — изолированные вершины и клики”.

3 Доказать, что существует формула первого порядка кванторной глубины $v+1$, которая истинна в том и только том случае, если в графе существует простой цикл нечетной длины, не превосходяшей $2^v - 1$.

4 а) Пусть G — простой цикл на семи вершинах, H — простой цикл на восьми вершинах. Доказать, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}(G, H, 4)$.

б) Пусть G — простой цикл на девяти вершинах, H — простой цикл на восьми вершинах. Доказать, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}(G, H, 4)$.

5 Доказать, что свойство связности нельзя записать с помощью формулы первого порядка.

6 Доказать, что свойство “множество вершин графа четно” нельзя записать с помощью монадической формулы.

7 Докажите, что у любой формулы существует *предваренная нормальная форма.* Иными словами, для любой формулы первого (второго) порядка φ существует такая формула первого (второго) порядка $\tilde{\varphi}$, все кванторы которой стоят в начале формулы, что для любого графа G

$$G \models \varphi \Leftrightarrow G \models \tilde{\varphi}.$$

8 Сформулируйте и докажите теорему Эренфойхта для формул первого порядка, все кванторы в которых находятся в начале формулы.

2 Описательная сложность в классе больших связных графов

1 Пусть H — звезда на v вершинах. Найдите $D(H)$.

2 Пусть H — простой цикл на v вершинах. Найдите $D(H)$.

3 Пусть H — связный граф, степень каждой вершины которого больше 1. Найдите $D(H)$.

4 Пусть H — дерево, полученное следующим образом. Пусть вершины x_1, x_2, x_3, x_4 графа H образуют простой путь (вершины пронумерованы в порядке следования в пути). Пусть, кроме того, $v-4$ дополнительные вершины в графе H соединены ребрами только с x_2. Никаких других вершин в H нет. Найдите $D(H)$.

5 Пусть H — дерево, полученное следующим образом. Пусть вершины x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 графа H образуют простой путь (вершины пронумерованы в порядке следования в пути). Пусть, кроме того, $v-5$ дополнительных вершин в графе H соединены ребрами только с x_2. Никаких других вершин в H нет. Найдите $D(H)$.

6 Пусть H — дерево, полученное следующим образом. Пусть вершины $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ графа H образуют простой путь (вершины пронумерованы в порядке следования в пути). Пусть, кроме того, две дополнительные вершины в графе H соединены ребрами только с x_2. Никаких других вершин в H нет. Найдите $D(H)$.

7 Докажите, что для любого связного графа H на v вершинах кроме P_2 и P_3 (простых путей на двух и трех вершинах соответственно) выполнено $D(H) > v/2$.

3 Описательная сложность в классе k-связных графов и случайные графы

1 Пусть H — полный граф на v вершинах. Найдите $D^c(H)$.

2 Пусть H — граф, полученный удалением из полного графа на 4 вершинах ровно одного ребра. С помощью общей оценки на величину D^c, доказанной на лекции, найдите $D^c(H)$.

3 Граф называется *строго сбалансированным*, если его плотность больше плотности любого его собственного подграфа. Докажите, что а) любой строго сбалансированный граф является связным, б) любое дерево является строго сбалансированным графом. Приведите пример связного графа, который не является строго сбалансированным.

4 Найдите все значения $\rho < 1$, при которых существует строго сбалансированный граф с плотностью ρ.

5 Докажите, что для любого рационального $\rho \in [1, 3/2)$ существует строго сбалансированный граф с плотностью ρ.

6 Используя утверждение из предыдущей задачи, докажите, что для любого рационального $\rho \geq 1$ существует строго сбалансированный граф с плотностью ρ.

7 Говорят, что случайный граф $G(n, p)$ *подчиняется закону нуля или единицы*, если для любой формулы первого порядка ϕ либо $\mathsf{P}(G(n,p) \models \phi) \to 0$, либо $\mathsf{P}(G(n,p) \models \phi) \to 1$ при $n \to \infty$.

а) Докажите, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если для любого $k \in \mathbb{N}$ с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(n,p), G(m,p), k)$ при $n, m \to \infty$.

б) Докажите предыдущее утверждение в обратную сторону.

8 С помощью задачи 7а) докажите, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha > 2$, подчиняется закону нуля или единицы.

9 С помощью задачи 7а) докажите, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если $\min\{p, 1-p\}n^{\alpha} \to \infty$ при $n \to \infty$ для любого $\alpha > 0$.

4 Список основных обозначений в задачах

- $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}$ (или просто EHR) — игра Эренфойхта в случае языка первого порядка (т.е. игроки выбирают только вершины графов).

- $G \models \phi$ — свойство, заключающееся в том, что формула ϕ истинна на графе G.

- $D(H) = \min_{k\in\mathbb{N}} D_k(H)$, где $D_k(H)$ — минимальное число d, для которого существует формула первого порядка кванторной глубины d, обладающая следующим свойством. Для любых двух связных графов G_1, G_2 с $v(G_1) \geq k$, $v(G_2) \geq k$ таких, что $G_1 \supseteq H$, $G_2 \not\supseteq H$, выполнено $G_1 \models \phi$, $G_2 \models (\neg\phi)$. Здесь и далее $v(G)$ — число вершин графа G.

- $D^c(H) = \min_{k\in\mathbb{N}} D^c_k(H)$, где $D^c_k(H)$ — минимальное число d, для которого существует формула первого порядка кванторной глубины d, обладающая следующим свойством. Для любых двух k-связных графов G_1, G_2 таких, что $G_1 \supseteq H$, $G_2 \not\supseteq H$, выполнено $G_1 \models \phi$, $G_2 \models (\neg\phi)$.

- $G(n, p)$ — случайный граф Эрдеша-Реньи в биномиальной модели. В этом графе n вершин, все ребра проводятся независимо, с вероятностью p каждое.