

# Случайные остовные деревья

Ягудин Михаил. Летняя школа «Комбинаторика и алгоритмы», лето 2016 года

## Матричная теорема о деревьях

Напомним, что лапласиан графа  $\Delta_G := M \times M^T$ , где  $M$  — матрица размера  $|V| \times |E|$  (строки индексируются вершинами, а столбцы рёбрами), в каждом столбце стоят  $+1$  и  $-1$  в строках, которые это ребро соединяет (знаки выбираем произвольно).

1. Чему равны элементы матрицы  $\Delta_G$ ? Покажите, что сумма чисел в каждой строке равна 0, поэтому матрица вырожденная.

2. **Теорема Кэли о количестве деревьев.** Как выглядит матрица  $\Delta_K$  для полного графа на  $n$  вершинах? Вычеркните столбец и строку, посчитайте определитель.

## Электрические цепи

3. Докажите, что следующие преобразования не меняют эффективную проводимость цепи:

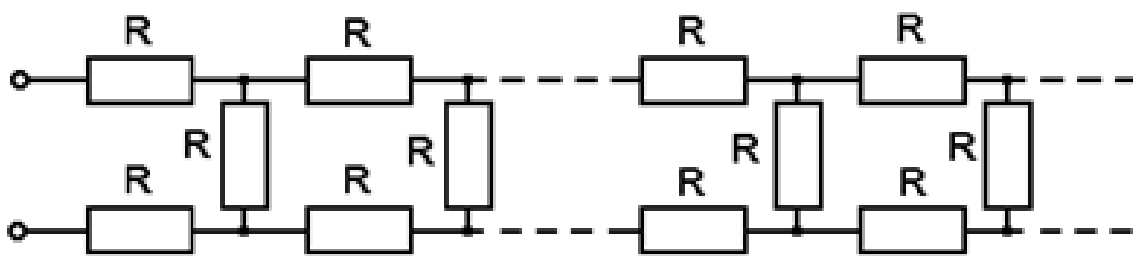
а) замена двух параллельно соединённых резисторов проводимостей  $C_1, C_2$  на один резистор проводимости  $C_1 + C_2$ ;

б) замена двух последовательно соединённых резисторов проводимостей  $C_1, C_2$  на один резистор проводимости  $\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ ;

в) объединение двух вершин с одинаковыми потенциалами в одну новую вершину.

4. Вычислите эффективную проводимость между а) противоположными б) соседними вершинами куба с рёбрами единичной проводимости.

5. (**Московская физическая олимпиада**) Вычислите эффективную проводимость бесконечной в одну сторону лестницы, состоящей из резисторов единичных сопротивлений.



Когда ток протекает через резистор,  $I^2 R$  энергии рассеивается (энергия уходит на нагревание резистора).

Поток  $j$  — функция на рёбрах графа такая, что  $j(xy) = -j(yx)$ ;  $\sum_y j(xy) = 0$  для вершины  $x \notin P \cup N$ ;  $j(xy) = 0$ , если  $x$  и  $y$  несмежные вершины.

6. **Принцип Томпсона.** Если  $I$  — едичный поток, то «тепловая энергия»  $Q(I) = \frac{1}{2} \sum I^2(xy)R(xy)$  достигает своего минимального значения на гармоническом потоке (т.е.  $I$  — это «электрический ток»).

7. **Закон сохранения энергии.** минимальное значение тепловой мощности равно эффективной проводимости цепи.