Клетчатые фигуры, квадратичные формы и class number

Листок 1

Теорема Ферма-Эйлера о сумме двух квадратов. Уравнение $x^2+y^2=p$, где $p=4k+1$ — простое, имеет решение в натуральных числах.

Геометрическое доказательство 1. Рассмотрим множество решений уравнения $ab+cd=p$ в натуральных числах, удовлетворяющих либо условию $b>d$, либо $b=d=1$ и $a>c$. Пусть S — множество всех таких решений, а $S'\subset S$ — множество решений, для которых $b>d$. Определим отображения $f: S'\to S'$ и $g: S\to S$ (рис. 1). Очевидно, $f(f(u))=u$ и $g(g(v))=v$ для любых решений u,v из множеств S',S соответственно, т.е. оба отображения являются инволюциями.

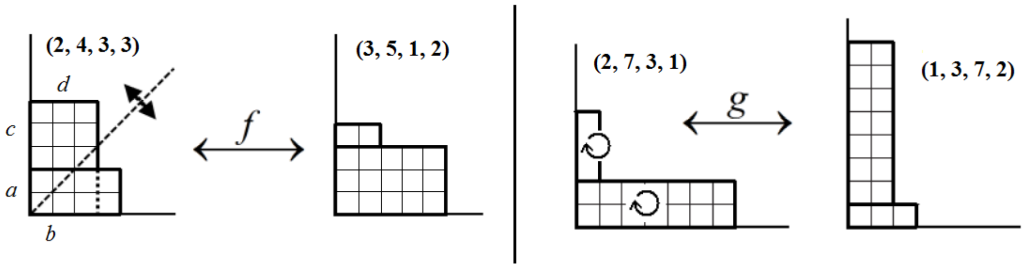

Рис. 1: Инволюции f и g на множестве "уголков"

Единственная неподвижная точка f (т.е. четверка чисел (a,b,c,d) такая, что $f(a,b,c,d)=(a,b,c,d)$) имеет вид $(1,\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2},1)$. Значит, в S' нечетное число элементов. В $S\backslash S'$ ровно $\frac{p-1}{2}=2k$ элементов. Это четверки вида $(1,b,1,p-b)$ для $1\le b\le\frac{p-1}{2}$. Поэтому и в S нечетное число элементов.

Следовательно, инволюция g имеет по крайней мере одну неподвижную точку (на самом деле ровно одну, но из данного рассуждения это еще не видно), и для такой четверки (a,b,c,d) имеем $a=b$ и $c=d$. Тогда $x=a$, $y=b$ — решение исходного уравнения. □

Геометрическое доказательство 2 (D. Zagier, А.В. Спивак). Пусть S множество решений уравнения $b^2+4ac=p$ в натуральных числах. Определим на множестве S инволюции f и g (рис. 2):

$$f:(b,a,c)\to\begin{cases}(b+2c,c,a-b-c),\ b<a-c;\\(2a-b,a,b-a+c),\ a-c<b<2a;\\(b-2a,b-a+c,a),\ b>2a;\end{cases}$$

$$g:(b,a,c)\to(b,c,a).$$

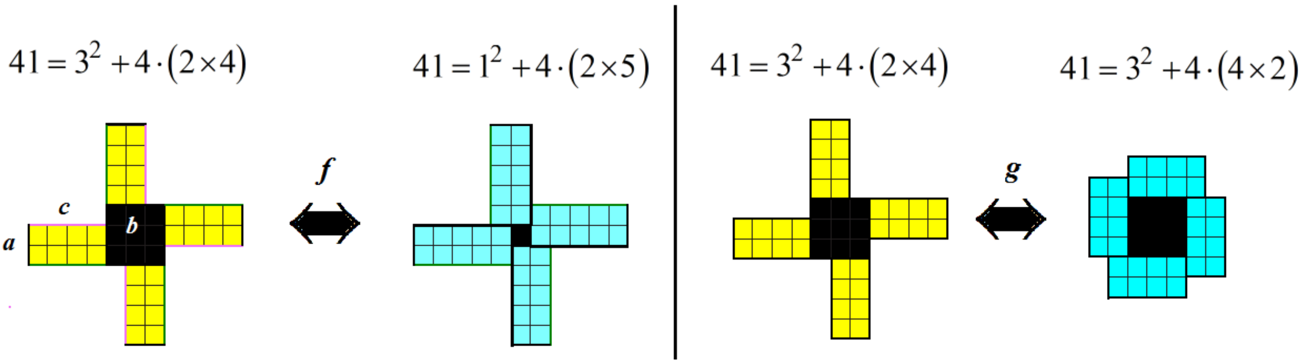

Рис. 2: Инволюции "ветряных мельниц"

Единственная неподвижная точка f — тройка $(1,1,\frac{p-1}{4})$. Значит, $|S|$ нечетно, и g имеет хотя бы одну неподвижную точку (b,a,c), для которой $a=c$. Тогда $x=b$, $y=2a$ — решение исходного уравнения. □

Заявление 1. Пусть $p = 8k + 3$ — простое число. Тогда уравнение $x^2 + 2y^2 = p$ разрешимо в натуральных числах.

Геометрическое доказательство. Пусть S — множество всех решений уравнения $ab + 2cd = p$ в натуральных числах, а $S' \subset S$ — множество тех решений, для которых хотя бы одно из чисел b, d отлично от 1. Определим на S инволюцию f (рис. 3) и $g(a, b, c, d) = (b, a, d, c)$.

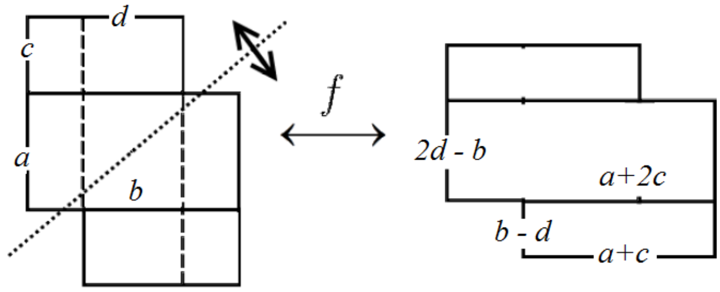

Рис. 3: Инволюции "зигзагов"

Инволюция f не имеет неподвижных точек при $p = 8k + 3$, поскольку отсутствуют решения уравнения $k^2 - 2l^2 = p$ и зеркально симметричные "зигзаги". Кроме того, $|S \backslash S'| = \frac{p-1}{2} = 4k + 1$. В S нечетное число элементов, а значит, g имеет хотя бы одну неподвижную точку. $\square$

Задачи

1. Найдите количество решений уравнения $b^2 + 4ac = 29$ в натуральных числах (1 б).
2. Запишите выражение для функций f и g из геометрического доказательства с "уголками" (3 б).
3. Придумайте аналог доказательства с "уголками" для уравнения $x^2 + y^2 = 2p$ (4 б).
4. Попробуйте обобщить доказательство с "ветряными мельницами" на случай $x^2 + y^2 = n = p_1 p_2$, где p_1, p_2 — простые числа вида $4k + 1$ (4 б).
5. Докажите, что уравнения $x^2 + 2y^2 = 8k + 5$ и $x^2 + 2y^2 = 8k + 7$ не имеют решений в целых числах (1 б).
6. Докажите, что выражение для функции f из доказательства с "ветряными мельницами" определяет инволюцию. (3 б)
7. Докажите, что при $p = 8k + 7$ уравнение $x^2 - 2y^2 = p$ имеет решение в натуральных числах, удовлетворяющее условию $x > 2y$ (указание: воспользуйтесь конструкцией из доказательства Заявления 1) (4 б).
8. Придумайте аналогичное доказательство для уравнения $x^2 + 3y^2 = p$ (8 б).