

Задачи по курсу

«Простые числа в арифметических прогрессиях»

Листок 1

1. а) (1) Из геометрических соображений найдите:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$$

б) (1) Найдите сумму геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^n + \dots$$

Нужно ли наложить какое-то ограничение на q ?

2. Найдите формулу для сумм:

а) (1) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$

б) (1) $1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1} + \dots$

Замечание: Для краткости вместо $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ часто пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. (1) Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Про них известно, что $|a_n| \leq |b_n|$ для любого натурального n .

Верно ли, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится?

4. Дана таблица положительных чисел:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

а) (2) Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(I) Ряды $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1m}$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}$, ..., $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходятся к числам A_1, A_2, \dots, A_n соответственно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится к A .

(II) Существует конечная точная верхняя грань S сумм произвольного набора элементов из таблицы.

И при этом $A = S$.

б) (1) Пусть $S_1 = a_{11}$, $S_2 = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$, ..., $S_n = \sum_{i,j \leq n} a_{ij}$... Последовательность $\{S_n\}$ сходится.

Правда ли, что тогда выполнены условия (I) и (II)?

5. (6) Докажите, что:

$$\int_0^y dx + \int_0^y x dx + \int_0^y x^2 dx + \dots = \int_0^y \frac{1}{1-x} dx$$

6. (2-4) Вспомнив разложение в ряд для e^x и $\ln(1-x)$, возведите экспоненту в степень логарифма. Какое получается тождество? Убедитесь в его истинности для слагаемых степени не более 4.