Пересечения выпуклых тел. Листок 2.

Для получения зачёта стоит набрать 12 баллов по двум листкам.

1. *Дробная теорема Юнга.* Даны n точек на плоскости. Для некоторого $0 < \alpha \le 1$ известно, что не менее, чем αC_n^2 отрезков между этими точками имеют длину не больше 1. Докажите, что существует $\beta > 0$ такое, что не меньше βn точек накрываются кругом радиуса $1/\sqrt{3}$, причём β стремится к 1 при α стремящемся к 1. (На занятии мы доказывали слабую версию дробной теоремы Хелли, для которой подобное утверждение неверно. Можно пользоваться более сильной версией, для которой β стремится к 1 при α стремящемся к 1.) (2 балла.)

2. *Цветная теорема Хелли.* В $\mathbb{R}^d$ даны n выпуклых тел, покрашенные в $d+1$ цвет. Известно, что если мы возьмём $d+1$ множество попарно разных цветов, то у них есть общая точка. Нужно доказать, что найдётся цвет, в котором у всех тел есть общая точка. (2 балла.)

3. *Цветная теорема Каратеодори для конусов.* В $\mathbb{R}^d$ даны множества $M_1, \dots, M_{d+1}$. Существует точка $\bar{a} \in cone(M_i)$ для всех i (одна и та же). Докажите, что найдётся радужное множество S (т.е. $|S| = d+1$, $\forall i, S \cap M_i = 1$) такое, что $\bar{a} \in cone(S)$. (2 балла.)

4. Докажите, что обычная теорема Тверберга влечёт теорему Тверберга для конусов. (1 балл.)

5. (а) Научитесь строить семейства множеств $\mathcal{F}$ для которых $\tau^*(\mathcal{F})$ ограниченно, а $\tau(\mathcal{F})$ сколь угодно большое. (1балл.)

   (б) Научитесь строить семейства множеств $\mathcal{F}$ для которых $v(\mathcal{F})$ ограниченно, а $v^*(\mathcal{F})$ сколь угодно большое. (1 балл.)

6. Пусть $\mathcal{F}$ — конечное множество отрезков на прямой. Докажите, что $\tau(\mathcal{F}) = v(\mathcal{F})$. (1 балл.)