

Для получения зачета необходимо набрать  $n$  баллов, где точное значение  $n$  будет уточняться.

1. (1) Докажите, что любой многогранник можно разрезать на тетраэдры, вершины которых не обязательно лежат в вершинах многогранника.

2. (2) Каково наименьшее количество тетраэдров в триангуляции куба?

3. (2) Докажите, что у любого выпуклого многогранника с  $n$  вершинами есть триангуляция, содержащая не более  $2n - 7$  тетраэдров.

4. а) (2) Верно ли, что для любых  $n$  точек общего положения на плоскости существует многоугольник с вершинами во всех этих точках?

б) (7) Верно ли, что для любых  $n$  точек общего положения в пространстве существует многогранник с вершинами во всех этих точках?

5. а) (3) На плоскости расположено конечное число выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть так, чтобы не задеть другие.

б) (7) Можно ли расположить бесконечное число равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, так, чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных? Про эту задачу, ее мотивировку и следствия из нее можете расспросить Алексея Яковлевича Канель-Белова, ключевые слова: "самозаклинивающиеся структуры".

6. (7) Существует ли такой многогранник и точка вне него, что из этой точки не видно ни одной из его вершин?

7. (1) Докажите формулу Эйлера для многогранника с одной дыркой.

8. (Задача просто для того, чтобы подумать над ней, она не будет учитываться) Поймите, что означает, что многогранник имеет  $k$  дырок и докажите формулу Эйлера для многогранника с дырками.

9. а) (1) Приведите пример многогранника с дыркой, не имеющего реберной несамопересекающейся развертки.

б) (1) Приведите пример многогранника без дырок, не имеющего реберной несамопересекающейся развертки, у которого не все грани являются выпуклыми многоугольниками (и идейно отличного от приведенного на занятии).

10. (2) В углу прямого параллелепипеда сидит муравей. Верно ли, что наиболее удаленная от него точка по поверхности — это противоположная вершина?

11. а) (3) Какую наибольшую длину может иметь кратчайшая на кубе со стороной 1?

б) (7) Какую наибольшую длину может иметь кратчайшая на правильном тетраэдре со стороной 1?

12. (4) Верно ли, что единственный выпуклый многогранник, который можно сложить из прямоугольного листа бумаги — это тетраэдр?

13. Из контура обычной развертки куба (креста) сверните отличный от куба выпуклый многогранник. За каждый новый комбинаторный тип многогранника 1 балл.

14. (7) Найдите все комбинаторные типы многогранников, для которых существует реберная развертка, контур которой является треугольником.

15. (2) Докажите аналог теоремы Минковского для многоугольника.

16. (2) Докажите, что сумма векторов ежа для невыпуклого многогранника также равна 0.

17. (3) Докажите теорему Минковского для 4 векторов.

18. (7) Докажите, что среди всех выпуклых многогранников с данными направлениями граней и с данным объемом наименьшую площадь поверхности имеет многогранник, описанный вокруг шара.