

Введение в топологическую динамику

Данила Черкашин

August 2016

1. Докажите, что поворот окружности на иррациональный угол является минимальной динамической системой.
2. Докажите, что десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой наперед заданной комбинации цифр.
3. Рассмотрим отображение окружности единичной длины, заданное по формуле

$$T_2(x) := 2x \pmod{1}.$$

- Докажите, что $T_2(x)$ топологически транзитивно.
 - Докажите, что периодические точки отображения $T_2(x)$ плотны.
 - Чему равно количество периодических точек отображения $T_2(x)$ с периодом ровно n ?
4. Рассмотрим отображение окружности единичной длины, заданное по формуле

$$T_m(x) := mx \pmod{1},$$

где m — целое число, по модулю большее единицы.

- Докажите, что $T_m(x)$ топологически транзитивно и его периодические точки отображения плотны.
 - Чему равно количество периодических точек отображения $T_m(x)$ с периодом ровно n ?
5. Для числа $\lambda \in \mathbb{R}$ определим отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$f_\lambda(x) := \lambda x(1 - x).$$

- Чему равно количество периодических точек с периодом ровно n у отображения f_4 ?
- Чему равно количество периодических точек с периодом ровно n у отображения f_3 ?
- Докажите, что при $3 < \lambda \leq 4$ отображение f_λ имеет периодическую точку порядка 2.
- Докажите, что при $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$ отображение f_λ не имеет периодических точек порядка больше двух.