

Комбинаторная геометрия: листок 3

1. **Упражнение с лекции.** Докажите, что если из вершины x графа диаметров выходят три ребра (диаметра), то второй конец y “среднего” ребра имеет степень 1, т.е. других ребер с концом в y , кроме ребра (x, y) , нет.
2. Может ли граф диаметров представлять собой цикл на пяти вершинах? на шести? **Внимание!** Один и тот же цикл можно нарисовать многими разными способами. Примеры приведены на рисунке 1.

Определение. Назовем *хроматическим числом* графа G величину $\chi(G)$, равную наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить множество вершин графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

3. Докажите, что если множество $F \subset \mathbb{R}^2$ конечно, то хроматическое число его графа диаметров в точности равно минимальному числу кусков меньшего диаметра, на которые можно разрезать “торт” F .
4. Рассмотрим окружность на плоскости. Соединим две точки окружности ребром, если они служат концами диаметра окружности. Получится *бесконечный* граф диаметров. Какое у него хроматическое число? Равно ли оно минимальному количеству кусков в задаче о разрезании окружности на части меньшего диаметра?

Определение. Назовем *деревом* любой связный граф без циклов. Примеры деревьев приведены на рисунке 2. Как и цикл, данное дерево можно по-разному изображать на плоскости.

5. Докажите, что для любого дерева с не более четырьмя вершинами существует множество точек на плоскости, у которого граф диаметров совпадает с данным деревом.
6. При каком минимальном n существует дерево на n вершинах, которое нельзя реализовать на плоскости как граф диаметров какого-либо множества точек F ?