Комбинаторика и алгоритмы **Февраль 2020**

Графы с запрещёнными подграфами

Для зачета по курсу необходимо решить 5 задач.

1. В однокруговом турнире математических боев участвовало n команд. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. При этом любые три команды в играх между собой набрали попарно различное количество очков. Каково наибольшее количество ничьих могло быть в этом турнире?

2. Докажите, что при $m \leqslant 8$ верна формула $\mathrm{ex}(n, K_m) = \left\lfloor \frac{m-2}{2m-2} n^2 \right\rfloor$.

3. Найдите наибольшее количество ребер в графе с v вершинами, в котором нет двух треугольников с общим ребром.

4. Каждые два из k^2+k+1 городов соединены прямым рейсом одной из k авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый путь из четырех рейсов одной авиакомпании..

5. Придумайте такие $n \geqslant 20$ и k, чтобы была верна следующая задача:

В компании из n человек каждый знает хотя бы k знакомых. Докажите, что можно выбрать две группы из четырёх человек так, что люди из разных групп обязательно знакомы.

6. Докажите оценку $ex(n, K_{2,m}) \leqslant \frac{n(1+\sqrt{4(m-1)(v-1)+1})}{2}$ с использованием неравенства между средним квадратичным и средним арифметическим.

7. Докажите, что на никакие три точки сферы в $\mathbb{F}_p$ не лежат на одной прямой

8. Сколько решений имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = a$ в $\mathbb{F}_p$?