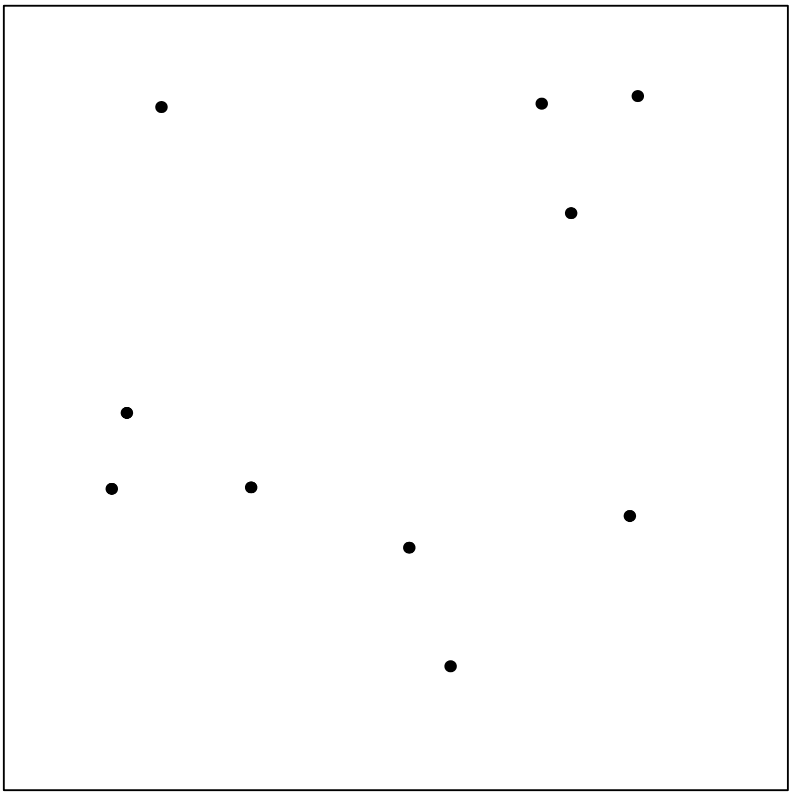
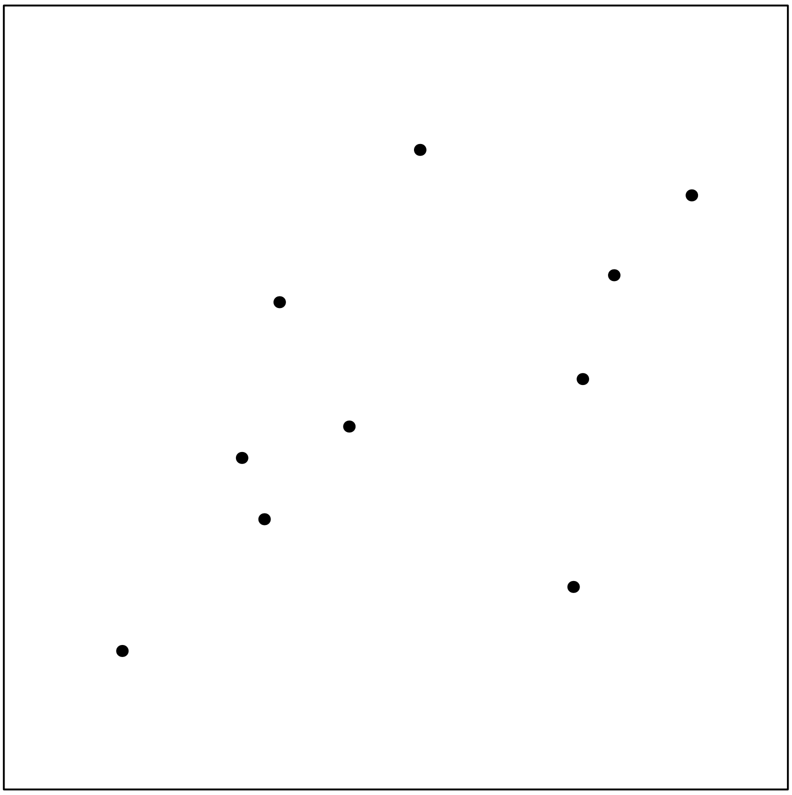
Задачи к курсу «Триангуляции Делоне»

1. Нарисуйте триангуляции Делоне и разбиения Вороного следующих наборов точек:





Σ – система точек на плоскости.

$\mathfrak{T}$ – триангуляция Σ, $T \in \mathfrak{T}$ – треугольник в этой триангуляции.

$DT(\Sigma)$ – триангуляция Делоне точек Σ.

$V(p, \Sigma)$ – область Вороного точки p в системе Σ.

2. (*2 балла*) Опишите алгоритм, как построить *произвольную* триангуляцию за $O(n \log n)$.

3. (*1 балл*) Докажите, что $DT(\Sigma)$ НЕ минимизрует сумму ребер триангуляции.

4. (*1 балл*) Докажите, что минимальный отрезок между точками Σ входит в систему Делоне.

5. (*1 балл*) Докажите, что область Вороного точки p не ограничена тогда и только тогда, когда точка p лежит на границе выпуклой оболочки множества точек Σ.

6. (*1 балл*) *Граф Габриеля* на множестве точек Σ определяется следующим образом: точки p и q соединены ребром, если круг с диаметром pq не содержит других точек Σ. Докажите, что $DT(\Sigma)$ содержит граф Габриеля, причем точки p и q соединены ребром в графе Габриеля тогда и только тогда, когда pq лежит в триангуляции Делоне, причем пересекается с отрезком $V(p) \cap V(q)$.

7. (*5 баллов*) Рассмотрим произвольную точку X внутри выпуклой оболочки Σ. Рассмотрим все треугольники с вершинами в Σ, и для каждого из них посчитаем степень точки X относительно его описанной окружности. Докажите, что эта величина максимальна, когда треугольник лежит в триангуляции Делоне.

8. **(a)** (*3 балла*) Пусть T — триангуляция множества из n точек на плоскости. Пусть ℓ прямая, которая не проходит ни через одну из этих точек. Докажите, что ℓ пересекает не более $2n-4$ ребер триангуляции и что эта оценка является точной для $n > 3$.

(b) (*2 балла*) Если прямая ℓ проходит через хотя бы одну вершину, то ℓ пересекает по внутренним точкам не более, чем $2n - 5$ ребер триангуляции.

(c) (*2 балла*) С каким максимальным числом ребер триангуляции множества из n вершин может иметь общую точку (не обязательно внутреннюю) произвольная прямая?

9. (*100 баллов*) Реализуйте алгоритм, строящий разбиение Делоне за $O(n \log n)$.

Для получения зачета необходимо набрать 7 баллов.