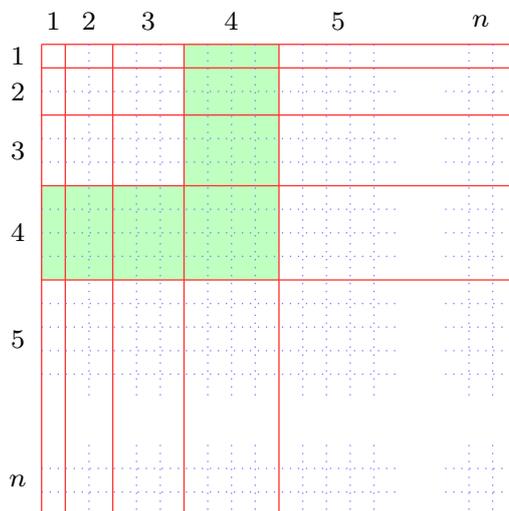


1. Введение

Задача 1. Докажите, что $1^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, сложив из нескольких пирамид из кубиков параллелепипед.

Задача 2. Докажите, что $1^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2$, пользуясь картинкой ниже.



$$S_k(n) := 1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k.$$

Задача 3. а) $S_k(n)$ — многочлен от n степени $k+1$ со старшим членом $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$.

б) Следующий его член равен $\frac{1}{2}n^k$.

$$S_1(n) = (1/2)n^2 + (1/2)n$$

$$S_2(n) = (1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)n$$

$$S_3(n) = (1/4)n^4 + (1/2)n^3 + (1/4)n^2 + 0$$

$$S_4(n) = (1/5)n^5 + (1/2)n^4 + (1/3)n^3 + 0 + (1/30)n$$

$$S_5(n) = (1/6)n^6 + (1/2)n^5 + (5/12)n^4 + 0 + (1/12)n^2 + 0$$

$$S_6(n) = (1/7)n^7 + (1/2)n^6 + (1/2)n^5 + 0 + (-1/6)n^3 + 0 + (1/42)n$$

$$S_7(n) = \dots + 0 + (-7/24)n^4 + 0 + (1/12)n^2 + 0$$

Задача 4. Придумайте формулу для коэффициента при n^{k-5} в $S_k(n)$ (доказывать ее не требуется).

2. Формальные степенные ряды

Формальным степенным рядом называется (бесконечная) формальная запись вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, где a_i — числа, а x — формальный символ.

Задача 5. Вычислите (найдите все коэффициенты)

а) $(1 + x + x^2 + \dots)^n$; **б)** $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots$

Задача 6. Вычислите а) $\frac{1}{1 - \alpha x}$; б) $\frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}$ (при $\alpha \neq \beta$); в) $\frac{1}{1 - x - x^2}$ (двумя способами).

Задача 7. Докажите, что при $a_0 \neq 0$ ряд $a_0 + a_1x + \dots$ обратим.

Формальной экспонентой называется ряд $\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$.

Задача 8. Найдите $\exp(x \frac{d}{dx})$ (как оператор на многочленах).

Задача 9. Найдите первые несколько коэффициентов ряда $\text{td}(x) := \frac{x}{\exp(x) - 1}$ (достаточно дойти до коэффициента при x^3).

3. Числа Бернулли

Рядом Тодда называется формальный степенной ряд

$$\text{td}(x) := \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1x + B_2\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^3}{3!} + \dots;$$

коэффициенты B_n называются *числами Бернулли*.

Задача 10. Запишите рекурренту на числа Бернулли, кодируемую условной записью « $(B + 1)^{n+1} = B^{n+1}$ », и докажите ее.

УКАЗАНИЕ. $\frac{x}{e^x - 1} \cdot (e^x - 1) = x$.

Задача 11. Найдите B_4 и B_6 . Запишите получающуюся формулу для суммы 7-х степеней последовательных натуральных чисел.

Задача 12. Пусть f — многочлен, F — его *первообразная* (такой многочлен, что $F' = f$). Тогда $f(x) + \dots + f(x + n - 1) = \text{td}(\frac{d}{dx})(F(x + n) - F(x))$.

Задача 13. Чему равна производная многочлена $S_k(x)$?

Эти задачи можно обсуждать с Борей Бычковым, Сеовой Вороновым и Алексеем Савватеевым. Для получения зачета достаточно сдать 10 пунктов задач.

Фамилия, имя: _____

1	2	3а	3б	4	5а	5б	6а	6б	6в	7	8	9	10	11	12	13