Курс Дмитрия Ильинского

Для получения зачёта достаточно решить любые 5 задач (1 пункт — 1 задача). Некоторые понятия будут вводиться на второй лекции, игнорируйте их.

Пусть M и W — два множества из n элементов. M есть множество мужчин m_1, m_2, ... , m_n; W есть множество женщин w_1, w_2, ... , w_n.

Задача 1. **а)** Примените алгоритм Гейла-Шепли к указанному набору предпочтений (в обоих порядках). **б)** Найдите решётку устойчивых паросочетаний для указанного набора предпочтений.

$A : e, d, c, b, a$ $\quad a : A, B, C, D, E$
$B : a, e, d, c, b$ $\quad b : B, C, D, E, A$
$C : b, a, e, d, c$ $\quad c : C, D, E, A, B$
$D : c, b, a, e, d$ $\quad d : D, E, A, B, C$
$E : d, c, b, a, e$ $\quad e : E, A, B, C, D$

Задача 2. Если в ходе алгоритма Гейла-Шепли $w \in W$ отказал(а) $m \in M$, то пара $m - w$ не может встретиться ни в одном паросочетании.

Задача 3. Пусть $\varphi : M \to W$ и $\psi : M \to W$ — два произвольных устойчивых паросочетания. Тогда соответствие $\gamma = \min(\varphi, \psi) : M \to W$, определяемое как $\gamma(m) = \min_m(\varphi(m), \psi(m))$ (m достаётся худший из обоих вариантов является **а)** паросочетанием; **б)** устойчивым паросочетанием.

Задача 4. Предположим, что матрица предпочтений мужчин представляет собой латинский квадрат (каждый столбец есть перестановка имён женщин). Покажите, что все паросочетания, определяемые столбцами латинского квадрата, устойчивы тогда и только тогда, когда матрица предпочтений женщин двойственна к латинскому квадрату (то есть женщина w занимает j-е место в рейтинге мужчины m тогда и только тогда, когда тот занимает место с номером $n + 1?j$ в рейтинге женщины m, здесь $m \in M$ и $w \in W$ — любые женщины и мужчины).

Задача 5. Для данного набора предпочтений найдите **а)** одно; **б)** все устойчивые паросочетания для расселения студентов в общежитии:

$A : B, E, D, F, G, H, C$
$B : C, F, A, G, H, E, D$
$C : D, G, B, H, E, F, A$
$D : A, H, C, E, F, G, B$
$E : F, A, H, B, C, D, G$
$F : G, B, E, C, D, A, H$
$G : H, C, F, D, A, B, E$
$H : E, D, G, A, B, C, F$