Совершенные графы

22.02.2020-24.02.2020

Задача 1. Базовые оценки

Докажите, что $\chi(G) \geqslant \omega(G)$ и $\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$.

Задача 2. d-критические графы

а) В графе степень каждой вершины не превосходит d. Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

б) В связном графе степень каждой вершины не превосходит d и есть вершина степени меньше, чем d. Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в d цветов.

в) Граф называется d-критическим, если в любом его подграфе есть вершина степени не больше чем d. Докажите, что любой d-критический графы можно покрасить в $d+1$ цвет.

Задача 3. Планарные графы

а) Докажите, что для любого изображения связного графа на плоскости с непересекающимися ребрами верна формула Эйлера:$v-e+f=2$. Где v - количество вершин в графе, e - количество ребре в графе, f - количество граней на картинке.

б) Граф называется планарным если его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Докажите, что в любом планарном графе $e \leqslant 3n-6$.

в) Докажите, что любой планарный граф можно раскрасить правильным образом в 6 цветов.

Задача 4. Разбиение компании

В компании для любой группы людей есть человек из этой группы, который знает всех остальных из группы, кроме не более, чем трех. Докажите, что компанию можно разбить на 4 группы так, что в каждой из этих групп все знакомы друг с другом.Знакомство симметрично.

Задача 5. Хром число дополнения

Дан графе G на n вершинах, $\overline{G}$ — дополнение графа G.Докажите, что либо G, либо $\overline{G}$ нельзя правильным образом покрасить меньше, чем в $\sqrt{n}$ цветов.

Задача 6. Приемлемая раскраска

Докажите, что вершины любого графа с m ребрами можно раскрасить в d-цветов так, что одноцветных ребер было бы не больше, чем $\frac{m}{d}$.

Задача 7. Граф пересечения квадратов

Найдите d такое, что следующие графы являются d-критическими:

а) Граф пересечений равных квадратов на плоскости, если известно, что нет точки накрытой k-квадратами и стороны квадратов параллельны осям координат.

б) Граф пересечений не обязательно равных квадратов на плоскости, если известно, что нет точки накрытой k-квадратами и стороны квадратов параллельны осям координат.

Задача 8. Определения ЧУМ

Отношением порядка, или частичным порядком, на множестве M называется бинарное отношение $\leqslant$ на M (определяемое некоторым множеством, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Рефлексивность: $\forall a\ a \leqslant a$;

2) Транзитивность: $\forall a, b, c\ (a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$;

3) Антисимметричность: $\forall a, b\ (a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow a = b$.

Элементы x и y частично упорядоченного множества M называются сравнимыми если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

Цепью в частично упорядоченном множестве M называется подмножество M такое, что любые два элемента в нем сравнимы.

Антицепью в частично упорядоченном множестве M называется подмножество M такое, что любые два элемента в нем несравнимы.

Задача 9. Теорема Мирского.

Теорема Мирского. Если в конечном частично упорядоченном множестве максимальная цепь имеет мощностьm, то все множество можно накрыть m антицепями.

Задача 10. ЧУМ. Отрезки

На прямой даны 50 отрезков. Докажите, что если среди них нельзя найти 8 отрезков, каждые два из которыхимеют общую точку, то среди данных 50 отрезков можно найти 8 отрезков, никакие два из которых не имеютобщей точки.

Задача 11. ЧУМ. Числа

Докажите, что в любой последовательности из $mn+1$ различных чисел можно выбрать возрастающую подпоследовательность длины $n+1$ или убывающую подпоследовательность длины $m+1$,

Задача 12. ЧУМ. делимость

Среди чисел от 1 от $2n$ выбрали $n+1$ число. Докажите, что какое-то выбранное число делится на другое выбранное число.

Задача 13. Теорема Шпернера

Теорема Шпернера.

а) Невозможно выбрать более $\binom{n}{n/2}$ подмножеств в n-элементном множестве так, чтобы ниодно из них не содержало другого.

б) Пусть R — семейство подмножеств n-элементного множества, причем никакие два элемента R не вложены друг в друга. Пусть r_k — количество элементов в R, имеющих мощность k. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{r_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1$.

Задача 14. Теорема Дилуорса

Теорема Дилуорса. Если в конечном частично упорядоченном множестве максимальная антицепь имеет мощность m, то все множество можно накрыть m цепями.

Задача 15. Теорема Холла

Лемма Холла о свадьбах. Пусть есть компания юношей и девушек, причём некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Пусть также выполнено следующее свойство: любые m юношей суммарно знакомы не менее чем с m девушками (т.е. каждая из этих девушек имеет хотя бы одного знакомого среди рассматриваемых m юношей). Тогда можно организовать сватовство так, что каждому юноше достанется по невесте.

Задача 16. Раскраска по Холлу

Докажите, что рёбра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов так, чтобы из каждой вершины выходили рёбра каждого цвета.

Задача 17. Половины достаточно

В компании, где поровну юношей и девушек, каждый юноша знаком хотя бы с половиной девушек, а каждая девушка знакома хотя бы с половиной юношей (знакомства взаимны). Покажите, что можно организовать сватовство так, что каждому юноше достанется по невесте.

Задача 18. Холл для дисбаланса

В деревне живут n девушек и $(n-1)$ юношей, между некоторыми парами взаимная симпатия. Завтра в деревню прилетит дракон и съест одну из девушек. Докажите, что условие «независимо от выбора дракона удастся организовать сватовство между $(n-1)$ парами» равносильно следующему условию «для каждого юноши можно выбрать пару знакомых ему девушек так, что выбранные пары образуют дерево в графе девушек».

Задача 19. Холл для гаремов

В компании юношей и девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет составить себе гарем из m знакомых девушек. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

Задача 20. Теорема Кёнига

Паросочетанием в графе называется набор ребер такой, что любые два ребра из него не имеют общей вершины.

Вершинное покрытие графа G называется набор вершин такой, что любое ребро графа содержит хотя бы одну вершину из него.

Теорема Кёнига.

Формулировка на языке графов. Докажите, что в двудольном графе размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия.

Формулировка на языке таблиц. На клеточной доске отмечены некоторые клетки. Минимальное число линий (горизонтальных или вертикальных), которыми можно эти клетки накрыть, равно максимальному числу ладей, которых можно в эти клетки поставить без того, чтобы они били друг друга.

Задача 21. Примеры совершенных графов

Докажите, что следующие графы совершенные:

а) Полные

б) Двудольные

в) Пересечения отрезков на прямой

г) Непересечения отрезков на прямой

д) Дополнение к реберному графу двудольного графа

е) Хордальные графы (в любом цикле длины хотя бы 4 есть ребро соединяющее не подряд идущие вершины цикла)

Задача 22. Граф для ЧУМ

Над частично упорядоченным множеством следующим образом строится граф: вершины - это элементы множества, и два элемента соединяются ребром, если они сравнимы.

а) Докажите, что построенный граф - совершенный.

б) Докажите, что дополнение к построенному графу - совершенный граф.

Задача 23. Эквивалентные условия

Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) Граф G является совершенным;

б) В любом индуцированном подграфе G есть антиклика, пересекающая все клики максимального размера;

в) В любом индуцированном подграфе G и для любой вершины v есть антиклика, пересекающая все клики максимального размера, и содержащая вершину v.

Задача 24. Дублирование вершины

Рассмотрим следующую операцию с графом G - дублирование вершины v:

1) Добавляем новую вершину v';

2) Соединяем ее с v и всеми соседями v.

Докажите, что дублирование вершины сохраняет свойство совершенности графа, но не сохраняет свойство $\chi(G) = \omega(G)$.

Задача 25. Дублированный граф

Рассмотрим граф G' полученный из совершенного графа G одновременным дублированием всех вершин v по $\alpha_v - 1$ раз. (Дублирование -1 раз значит удаление вершины). Где α_v - количество антиклик максимального размера содержащих v.

1) Докажите, что в полученном графе размер максимальной антиклики такой же как в G.

2) Докажите, что G' может быть накрыт непересекающимися антикликами максимального размера.

3) Докажите, что в G' есть клика пересекающая все антиклики максимального размера.

4) Докажите, что в G есть клика пересекающая все антиклики максмимального размера.

5) Докажите, что $\overline{G}$ совершенный.

Задача 26. Теорема о совершенных графах

Дополнение к совершенному графу является совершенным графом.