Электрические сети и перечисление деревьев — 1

Задача 1. Докажите, что
а) определитель матрицы с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю;
б) если одна строка является линейной комбинацией нескольких других строк, то определитель равен нулю;
в) при умножении всех элементов какой-нибудь строки или столбца на константу определитель также умножается на эту константу.

Задача 2. Проверьте, что площадь параллелограмма, натянутого на вектора с координатами $(a; b)$ и $(c; d)$ равна $ad - bc$.

Задача 3. Цикл в перестановке $\sigma : (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ это подмножество элементов, которые переставляются циклическим образом. Цикл $1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1$ обозначается через $(1, 3, 2)$. Два цикла называются независимыми, если у них нет общих элементов.
а) Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения независимых циклов;
б) Найдите знак цикла длины k;
в) Найдите знак произведения двух циклов длин k_1 и k_2.

Задача 4. Докажите, что количество ориентированных корневых остовных деревьев с фиксированным корнем равно количеству остовных деревьев соответствующего неориентированного графа.

Задача 5. Посчитайте число остовных деревьев у полного графа на n вершинах с помощью матричной теоремы о деревьях.

Электрические сети и перечисление деревьев — 2

Определение 1. *Определитель* квадратной матрицы A размера $n \times n$ — это ориентированный объём n-мерного параллелепипеда. А также $\det A = \sum\limits_{\sigma} (-1)^{sign(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$, где $sign(\sigma)$ — количество беспорядков в перестановке σ.
Алгебраическое дополнение $A_{i,j}$ к элементу $a_{i,j}$ это умноженный на $(-1)^{i+j}$ определитель подматрицы размера $(n-1) \times (n-1)$, полученной выкидыванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение 2. *Ориентированное корневое остовное дерево* это остовное дерево, с корнем и выбранной ориентацией каждого ребра. При этом из корня не выходит ни одного ребра, а из каждой отличной от корня вершины выходит ровно одно ребро.

Задача 6. (каждый пункт по 2 балла) Окончите доказательство матричной теоремы о деревьях:
а) Покажите, что мономы отвечающие диагональным элементам в формуле для определителя либо отвечают ориентированным корневым остовным деревьям, либо имеют циклы.
б) Каждому такому подграфу с циклом отвечает перестановка. Покажите, что любое подмножество циклов этой перестановки определяет ровно один моном в формуле для определителя.
в) Найдите знак, с которым такой моном входит в формулу для определителя.
г) Покажите, что все мономы, отвечающие подграфам с циклами сокращаются.
д) Покажите, что производящая функция ориентированных корневых остовных деревьев с корнем v_i равна алгебраическому дополнению T_{ij} для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$, то есть не обязательно рассматривать алгебраическое дополнение к диагональному элементу .

Задача 7. (6 баллов) Докажите формулы Крамера для решения системы линейных уравнений.

Стоимости задач из Листка 1: Задача 1 = 2 балла, Задача 2 = 5 баллов, Задача 3 = 3 балла, Задача 4 = 3 балла, Задача 5 = 5 баллов.

Электрические сети и перечисление деревьев — 3

Определение 3. Подграфом H графа G мы называем любой граф H, имеющий те же вершины, что и G, и полученный удалением из G некоторого множества ребер. Сам G является своим подграфом. Через $k(H)$ мы обозначаем количество связных компонент графа H (изолированная вершина — это отдельная связная компонента), через $e(H)$ мы обозначаем количество ребер в H. Определим многочлен от переменных q и v равенством: $Z_G(q,v) := \sum\limits_{H \subseteq G} q^{k(H)} v^{e(H)}$.

Задача 8. (каждый пункт по 1 баллу) Вычислите многочлен $Z_G(q,v)$ в случае, когда G:
а) дерево; б) цикл длины n; в) цикл длины n, к каждой вершине которого приклеено дерево.

Задача 9. (2 балла) Для двух графов G_1 и G_2, не имеющих общих вершин, через $G_1 \sqcup G_2$ мы обозначаем их несвязное объединение. Докажите, что $Z_{G_1 \sqcup G_2}(q,v) = Z_{G_1} Z_{G_2}$.

Задача 10. (2 балла) Докажите, что $Z_G(q,v) = Z_{G/e}(q,v) + vZ_{G\setminus e}(q,v)$.

Задача 11. (каждый пункт по 1 баллу) Докажите, что
а) $Z_G(1,v) = (1+v)^{e(G)}$;
б) $Z_G(q,v)$ делится на $q^{k(G)}$ и найдите предел $\lim\limits_{q\to 0} \frac{Z_G(q,v)}{q^{k(G)}}$

Задача 12. (каждый пункт по 2 балла) Пусть n — число вершин графа G. Определим многочлен от переменной w равенством: $F_G(w) := \lim\limits_{q\to 0} \frac{Z_G(q,qw)}{q^n}$. Докажите, что:
а) $F_G(w)$ это многочлен, задаваемый формулой $\sum\limits_{H} w^{e(H)}$, где сумма берется по всем подграфам графа G, являющихся лесами (лес — это несвязное объединение одного или нескольких деревьев).
б) Найдите степень многочлена $F_G(w)$.
в) Докажите, что старший коэффициент многочлена $F_G(w)$ равен числу остовных деревьев G.

Для получения зачёта по курсу: нужно набрать не менее 15 баллов.