Раскраски графов. Теорема Брукса и ее усиления

1. Пусть $G = (V, E)$ связен, не содержит K_3 и $\forall v \in V\ \deg(v) \le d$. Докажите, что существует такая константа c, что $\chi(G) \le \frac{d}{2} + c$. (3 балла)

2. Докажите, что $\chi(G) \le 2$ тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины. (2 балла)

3. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов. (4 балла)

4. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1. Оказалось, что среди любых $n + 1$-й точек найдутся 2, соединенные отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков. (7 баллов)

Теоретические вопросы

5. Пусть $G = (V, E)$ связен и $\forall v \in V\ \deg(v) \le d$, кроме того, G — не нечётный цикл и не полный граф K_{d+1}. Тогда $\chi(G) \le d$.

   (a) Докажите теорему Брукса для случая, когда существует вершина степени меньше d (1 балл)

   (b) Докажите теорему Брукса, если в графе есть вершина при удалении которой граф теряет связность (1 балл)

   (c) Докажите теорему Брукса, если в графе есть пара вершин при удалении которых граф теряет связность (2 балла)

   (d) Докажите теорему Брукса, если в графе есть три вершины v, u, w, такие, что $v \sim u, u \sim w, v \not\sim w$, и при удалении пары (v, w) граф не теряет связность (2 балла)

   (e) Выведите из предыдущих пунктов доказательство теоремы Брукса в общем случае (1 балл)

6. Пусть в G нет K_3 и $d = 2^k - 1$. Тогда $\chi(G) < \frac{3}{4}d + 1$. (2 балла)

7. Для любого k найдется граф без K_3, у которого хроматическое число равно k. (2 балла)

8. $\forall k, d\ \exists G$: охват графа $g(G) \ge d$, и $\chi(G) \ge k$. (5 баллов)

Для получения зачета по курсу необходимо набрать 7 баллов