# Задачи к курсу “Нулевые суммы векторов”

Это полный список задач по курсу. Необходимое количество задач для получения зачета будет определено ближе к концу школы. Большинство задач должно быть возможно решить с помощью идей, изложенных на лекциях. Я могу давать подсказки всем желающим что-нибудь решить.

**1.** Пусть $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F}_p^n$, где $m \geqslant (d+1)(p-1)+1$. Докажите, что найдется подмножество $I \subset [m]$ такое, что $\sum_{i \in I} x_i = 0$ и $|I| \vdots p$.

**2.** Рассмотрим $d$-мерный куб $\{0,1\}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Пусть гиперплоскости $H_1, \dots, H_m$ покрывают все вершины этого куба, кроме одной. Докажите, что $m \geqslant d$.

**3.** Пусть $0 \leqslant k \leqslant p-2$, докажите, что $\sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^k = 0 \pmod p$.

**4a.** (Теорема Шевалле, 1935) Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$ степени меньше $n$. Тогда число решений уравнения $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ делится на $p$.

**4b.** Пусть $P_1, \dots, P_s$ – многочлены от $n$ переменных суммарной степени меньше $n$. Тогда число решений системы $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ делится на $p$. Выведите из этого утверждения теорему Эрдеша-Гинзбурга-Зива (теорему про $2n-1$ число).

**5a.** Пусть $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{F}_p$ – некоторые множества, причем $|S_i| = a_i + 1$. Пусть в многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ входят только мономы вида $x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, где $b_i \leqslant a_i$ для любого $i$. Докажите, что если $P(s_1, \dots, s_n) = 0$ на любом наборе $s_i \in S_i$, то $P$ является нулевым многочленом.

**5b.** (Теорема Алона о нулях, 1999) То же, только при условии, что в $P$ входят только мономы вида $x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, где либо $(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n)$, либо существует $i$, для которого $b_i < a_i$.

**6a.** (Теорема Коши-Дэвенпорта, 1935) Пусть $A, B \subset \mathbb{F}_p$, определим сумму множеств $A + B$ как множество элементов вида $a+b$, где $a \in A, b \in B$. Докажите, пользуясь теоремой Алона, что $|A+B| \geqslant \min\{p, |A| + |B| - 1\}$.

**6b.** Определим теперь $A \oplus B$ как множество элементов вида $a + b$, где $a \in A, b \in B$ и $a \neq b$. Докажите, что $|A \oplus B| \geqslant \min\{p, |A| + |B| - 2\}$.

**7.** Пусть $X \subset \mathbb{F}_p^n$ – множество, состоящее из не более, чем $\binom{n+d-1}{d} - 1$ элементов. Тогда существует ненулевой многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ степени не больше $d$, который обнуляется на каждой точке $x \in X$.

**8.** (Dvir, 2009) Пусть множество $X \subset \mathbb{F}_p^n$ таково, что для любого ненулевого вектора $v \in \mathbb{F}_p^n$ множество $X$ содержит прямую в направлении $v$ (то есть множество точек вида $u + vt$, $t \in \mathbb{F}_p$ для некоторого $u \in \mathbb{F}_p^n$). Докажите, что $|X| \geqslant \binom{p+n-1}{p-1} \geqslant \frac{p^n}{n!}$.

**9.** (Naslund-Sawin, 2016) Набор из $k$ множеств $A_1, \dots, A_k$ называется *цветком с $k$ лепестками*, если $A_i \cap A_j = K$ для фиксированного множества $K$ и любых $i \neq j$. Пусть $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ – семейство множеств, не содержащее цветка с тремя лепестками. Докажите, что

$$|\mathcal{F}| \leqslant 3 \sum_{k \leqslant n/3} \binom{n}{k}$$

**10a.** Пусть $X \subset \mathbb{F}_2^n$ таково, что $a+b+c+d \neq 0$ для различных элементов $a, b, c, d \in X$. Докажите, что $|X| \leqslant 2^{\frac{n+2}{2}}$.

**10b.** Докажите, что существует такое множество размера хотя бы $2^{[n/2]}$.

**11.** Пусть $A(i_1, \dots, i_d)$ – $d$-мерная матрица. Определим *суперранг* $\mathrm{rank}_{par.}(A)$ (англ. partition-rank) как наименьшее число $r$ такое, что $A$ представима в виде суммы не более $r$ $d$-мерных матриц вида $B(x_1, \dots, x_d) = B_1(x_i)_{i \in I} \cdot B_2(x_j)_{j \notin I}$ для некоторого непустого множества $I$. Докажите, что суперранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов на ее диагонали. (Термин “суперранг” не употребляется, у меня просто не получилось перевести на русский “partition-rank”)