А. Я. Канель-Белов
Небеса, август 2019

Серия А. Свойства гиперболы:

Рассматривается гипербола $xy = 1$. Линейное преобразование $T : x' = x \cdot k, y' = y/k$ переводит ее в себя. Оно называется *гиперболическим поворотом*. Докажите, что

1. Преобразование $x' = x \cdot k, y' = y$ изменяет площади в k раз, а преобразование T площади не изменяет. Любую точку гиперболы можно перевести в любую, выбрав подходящее k. (С помощью этого пункта решаются остальные.)

2. Рассмотрим отрезки касательных к гиперболе, заключенные между осями OX и OY. Докажите, что все они делятся пополам точкой касания и отсекают от осей координат треугольники равной площади.

3. Середины хорд, параллельных прямой m, лежат на одной прямой, проходящей через центр гиперболы (центр симметрии). Назовем прямую l *сопряженной* с прямой m.

4. Если l сопряжено с m, то и m сопряжено с l.

5. Пары касательных, проведенных в концах хорды, пересекаются на сопряженной прямой.

Серия B: Гиперболические числа

1. Рассмотрим формальные выражения вида $z = a + bj$, при этом $j^2 = 1$. Положим $|z|^2 = a^2 - b^2$. Докажите, что $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Пусть $e_+ = (1 + j)/2$, $e_i = (1 - j)/2$. Тогда $e_+^2 = e_+$, $e_-^2 = e_-$, $e_- e_+ = 0$. Если $z = a + bj$, то $z = (a + b)e_+ + (a - b)e_-$, если $z = \alpha e_+ + \beta e_-$ то $|z|^2 = \alpha\beta$.

2. Пусть $|z|^2 = 1$. Рассматриваем оператор $w \to wz$. Докажите, что он сохраняет площадию

3. Рассмотрим единичную гиперболу $a^2 - b^2 = 1$. Пусть $|z|^2 = 1$. Определим аргумент z как удвоеную площадь криволинейного треугольника ограниченного отрезками $[(0, 0), (1, 0)]$, $[(0, 0), z]$ и отрезком гиперболы. Докажите, что аргументы складываются.

4. Докажите, что $\lim_{z \to 0} sh(z)/z = 1$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $e^z = \mathrm{ch}(z) + \mathrm{sh}(z)$, $e^{-z} = \mathrm{ch}(z) - sh(z)$.

5. Пусть $z = a + bj, |z|^2 = 1$, $\varphi = \arg(z)$. Положим $ch(\varpi) = a, sh(\varpi) = b$. Итак, при умножении гиперболические модули перемножаются, а гиперболические аргументы – складываются. Выведите отсюда формулы сложения для гиперболических синуса и косинуса.

Серия C: Неевклидова плоскость

1. Известно, что концентрические дуги L_1 и L_2 орициклов на расстоянии h связаны соотношением $L_2 = L_1 \exp(h/r)$. Докажите, что площадь фигуры с дефектом D равна Dr^2.

2. Докажите, что длина L дуги эквидистанты на расстоянии h над участком прямой длины D равна $L = D\,\mathrm{ch}(h/r)$. Докажите, что длина дуги окружности радиуса R раствора α равна $\alpha r\,\mathrm{sh}(R/r)$, а площадь круга радиуса R равна $2\pi r^2(\mathrm{ch}(R/r) - 1)$.

3. Дана дуга $A_R B_R$ раствора α радиуса R, M_R – середина отрезка $[A_R, B_R]$, O – центр окружности. Найти $\lim_{R\to\infty} |OM_R|$.

4. Неевклидова плоскость разбита на правильные 7-угольники. Зафиксирован семиугольник P – семиугольник нулевого слоя. К нему примыкают семиугольники первого слоя, к ним – второго слоя и т.д. Сколько семиугольников в n-ом слое?

5. Преобразование плоскости переводит окружность в окружность. Докажите, что оно сохраняет углы.

6. Преобразование плоскости переводит циклы в циклы (*цикл* – это окружность или прямая). Докажите, что оно есть композиция инверсий.

7. Докажите, что проективное преобразование внутренности шара сохраняет углы на его поверхности.