22-25.02.2019.

Теорема о бутерброде.

Определение. Мерой на множестве X называется произвольная счетно-аддитивная функция: $\mu : \sigma \to [0, +\infty)$, где $\sigma \subset 2^X$ — семейство измеримых множеств, замкнутое относительно операций со множествами.

Определение. В рамках этого миникурса меру на $\mathbb{R}^d$ будем называть *хорошей*, если все открытые и замкнутые подмножества $\mathbb{R}^d$ измеримы, мера всего пространства — положительное число и для любой гиперплоскости h выполнено $\mu(h) = 0$.

Например для любого тела T имеющего площадь $\mu(X) = S(X \cap T)$ и для произвольной непрерывно интегрируемой функции $p(x, y)$ $\mu(X) = \int\limits_X p(x, y)dxdy$ являются мерами на плоскости.

1. Теорема о центральной точке. На $\mathbb{R}^d$ задана *хорошая* мера μ. Докажите, что существует точка p такая, что для любого полупространства H, содержащего p, выполнено $\mu(H) \geqslant \frac{1}{d+1}\mu(\mathbb{R}^d)$.

2. Теорема о центральной точке. Дискретная версия. В $\mathbb{R}^d$ дано конечное множество точек A. Докажите, что существует точка p такая, что для любого полупространства H, содержащего p, выполнено $|H \cap A| \geqslant \frac{1}{d+1}|A|$.

Теорема о бутерброде В $\mathbb{R}^d$ заданы d хороших мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$. Докажите, что существует полупространство H такое, что $\mu_i(H) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant d$.

Теорема о бутерброде. Дискретная версия. В $\mathbb{R}^d$ даны конечные множества точек $A_1, A_2, \ldots, A_d$. Тогда существует гиперплоскость h *делящая пополам* каждое множество A_i (по каждую сторону от h не более, чем $[\frac{1}{2}|A_i|]$ точек из A_i; на самой h может находится произвольное количество точек).

Определение. Множество точек A в $\mathbb{R}^d$ находится в общем положение, если на любой гиперплоскости лежит не более, чем d точек из A.

Теорема о бутерброде. Дискретная версия. Общее положение. В $\mathbb{R}^d$ даны конечные множества точек $A_1, A_2, \ldots, A_d$ такие, что $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_d$ находится в общем положении. Тогда существует гиперплоскость h *делящая* **ровно** *пополам* каждое множество A_i (по каждую сторону от h **ровно** $[\frac{1}{2}|A_i|]$ точек из A_i).

3. На плоскости дана хорошая мера μ. Докажите, что найдутся две прямые разрезающие плоскость на 4 части с равной мерой μ.

4. В 100 ящиках лежат бананы, яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины бананов, не менее половины яблок и не менее половины апельсинов.

5. Есть 100 слив с косточками. Веса любых двух слив отличаются не более, чем вдвое. Общий вес косточек встрое общего веса слив. Докажите, что сливы можно разделить на две кучки по 50 штук так, чтобы в каждой кучке доля косточек была меньше 35%.

Определение. Кривой моментов в $\mathbb{R}^d$ называется следующая кривая $\{(t, t^2, \ldots, t^n) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

6. Докажите, что любая гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ пересекает кривую моментов не более, чем в d точках.

7. Двое воров украли ожерелье, состоящее из драгоценных камней и хотят поделить его между собой. Ожерелье представляет собой драгоценные камни d видов, нанизанные на незамкнутую проволоку, камней каждого вида четное число. Воры хотят разрезать ожерелье на минимальное количество кусков и распределить их между собой так, чтобы каждый из них получил поровну камней каждого вида.

(a) Докажите, что для некоторых ожерелий им потребуется хотя бы d разрезов

(b) Докажите, что d разрезов хватит для любого ожерелья.

8. Akiyama, Alon В d-мерном пространства даны n-элементые множества (цвета) $A_1, A_2, \ldots, A_d$ такие, что точки $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_d$ находятся в общем положение. Докажите, что $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_d$ можно разбить на n *радужных* d-элементых множеств (каждое множество содержит ровно по одному элементу каждого цвета A_i) так, что их выпуклые оболочки не пересекаются.