Хроматический многочлен и дифференциальные уравнения

Задача 1. Найдите хроматический многочлен графа представляющего собой квадрат с проведенной диагональю.

Задача 2. Найдите хроматический многочлен цикла длины n.

Задача 3. Докажите, что второй по старшинству коэффициент в хроматическом многочлене графа равен со знаком минус количеству рёбер графа.

Задача 4. Докажите, что минимальный ненулевой показатель степени одночлена в хроматическом многочлене равен числу связных компонент графа.

Задача 5. Найдите симметрическую хроматическую функцию графа «треугольник» и выразите её через многочлены Ньютона.

Задача 6. Придумайте специализацию переменных $x_1, x_2, \ldots$ такую, что $X_G(x_1, x_2, \ldots) = \chi_c(G)$.

Задача 7. Найдите функцию Шура $s_3(p_1, p_2, \ldots)$.

Задача 8. Докажите, что
а) $(s_k(p_1, p_2, \ldots))'_{p_1} = s_{k-1}(p_1, p_2, \ldots)$;
б) $(s_k(p_1, p_2, \ldots))'_{p_n} = \dfrac{s_{k-n}(p_1, p_2, \ldots)}{n}$.

В следующих задачах G — граф на n вершинах, S — подмножество множества рёбер E графа G, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество вершин G, $G(S)$ — граф построенный на вершинах V и рёбрах S.

Задача 9. Докажите, что
а) $p_{\lambda(S)} = \sum\limits_{c \in K(G(S))} x_{c(v_1)} \cdot \ldots \cdot x_{c(v_1)}$, где суммирование ведётся по всем таким раскраскам графа $G(S)$, что каждая связная компонента покрашена в один цвет (K — множество таких раскрасок, $c(v_i)$ — цвет вершины v_i).
б) симметрическая хроматическая функция выражается через многочлены Ньютона по формуле: $X_G(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{c \in K(G)} x_{c(v_1)} \cdot \ldots \cdot x_{c(v_1)} = \sum\limits_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)}$, где суммирование ведётся по всем правильным раскраскам графа G.

Задача 10. Пусть $F = \sum\limits_{S \subseteq E} (-1)^{|S| - |V(G)| + k} x_{f_1} \cdot \ldots \cdot x_{f_k}$, где k —количество связных компонент графа $G(S)$, f_i — суммарный вес i-ой компоненты. Докажите, по индукции по количеству рёбер, что F удовлетворяет соотношению удаления стягивания с теми же начальными условиями, что и функция $W_G(x_1, x_2, \ldots)$. Для этого разбейте F на два слагаемых рассмотрев суммирование по подмножествам рёбер содержащим и не содержащим выделенное ребро.

Задача 11. Докажите, что функции Шура $s_k(p_1, p_2, \ldots)$ можно выразить через подграфы полного графа на k вершинах по формуле:

$$s_k(p_1, p_2, \ldots) = \frac{1}{k!} \sum_{V(K_k) = \sqcup_\alpha V_\alpha} \prod_{i=1}^{|\alpha|} (|V_i| - 1)! p_{|V_i|},$$

где K_k — полный граф на k вершинах, суммирование идёт по всевозможным разбиениям $\sqcup_\alpha V_\alpha$ множества его вершин в несвязное объединение, произведение идёт по компонентам i данного разбиения α, $|V_i|$ — это суммарное количество вершин в i-ой компоненте.

Для получения зачёта нужно решить любые 6 задач из задач 1–7, 8б или решить любую 1 задачу из задач 9–11.