В задачах c и C означают достаточно маленькое и достаточно большое число соответственно. Также всегда можно считать, что n тоже достаточно велико. Через $o(1)$ обозначается функция от n, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. В сложных задачах я могу давать подсказки, кому это интересно. Для зачета достаточно (но не обязательно необходимо) сдать 4 задачи без звездочки или хотя бы одну задачу со звездочкой(-ами).

Пусть $u_d(n)$ – это максимальное число ребер дистанционном графе в $\mathbb{R}^d$ на n вершинах.

1. (а) Докажите, что $u_2(n) \geqslant ne^{\frac{c\log n}{\log\log n}}$ (можно использовать Теорему о распределении простых чисел).

(б) Приведите пример графа G на n вершинах и с хотя бы $cn^{3/2}$ ребрами, не содержащего $K_{2,2}$.

2. Докажите, что **(а)** $u_3(n) \geqslant cn^{4/3}$; **(б)** $u_3(n) \leqslant Cn^{5/3}$; **(в**)** $u_3(n) \leqslant Cn^{3/2}$.

3. Докажите, что **(а)** $u_4(n) \geqslant \frac{1-o(1)}{4}n^2$; **(б*)** $u_4(n) \leqslant \frac{1+o(1)}{4}n^2$.

4. Диаметр конечного множества – это наибольшее расстояние между парами его точек. В этой задаче мы рассматриваем дистанционные графы диаметра 1, то есть соединяются пары вершин на максимальном расстоянии. Обозначим через $b_d(n)$ максимальное число ребер в графе диаметров в $\mathbb{R}^d$ на n вершинах.

(а) Докажите, что $b_2(n) = n$ при $n \geqslant 3$.

(б*) Докажите, что $b_3(n) = 2n - 2$ при $n \geqslant 4$.

5. (Другое доказательство теоремы Семереди-Троттера). Пусть $G = (V, E)$ – это произвольный граф (без петель и кратных ребер). *Число пересечений* $\mathrm{cr}(G)$ – это наименьшее возможное число пар пересекающихся ребер среди всех вложений G в плоскость (например, граф G планарен, когда его можно нарисовать на плоскости без пересечений. Таким образом, $\mathrm{cr}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда G планарный).

(а) Докажите, что $\mathrm{cr}(G) \geqslant |E| - 3|V| + 6$.

(б*) Пусть у графа G $|E| \geqslant 4|V|$. Тогда $cr(G) \geqslant \frac{|E|^3}{64|V|^2}$.

(в*) Используя пункт (б), докажите неравенство $u_2(n) \leqslant Cn^{4/3}$.

6. Пусть $\mathcal{L}$ – множество из n прямых в $\mathbb{R}^3$. Точка $p \in \mathbb{R}^3$ называется *джоинтом* для $\mathcal{L}$, если найдутся три прямые из $\mathcal{L}$, содержащие p, и направления этих прямых линейно независимы. Обозначим через $\mathcal{J}(\mathcal{L})$ множество всех джоинтов.

(а)** (Если не рассказал на лекции). Докажите, что $|\mathcal{J}(\mathcal{L})| \leqslant Cn^{3/2}$.

(б)** Для трех семейств прямых $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ определим джоинт и множество $\mathcal{J}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ аналогичным образом. Докажите, что $|\mathcal{J}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)| \leqslant C(|\mathcal{L}_1||\mathcal{L}_2||\mathcal{L}_3|)^{1/2}$.