

Фамилия, имя:

**Задача 1.** (1 балл) Пусть на плоскости даны две точки с координатами  $(s_1 + s_2\sqrt{3}; r_1 + r_2\sqrt{3})$ , где  $s_i, r_i \in \mathbb{Q}$ . И пусть прямая  $y = kx + b$  проходит через эти две точки. Докажите, что тогда числа  $k$  и  $b$  также имеют вид  $q_1 + q_2\sqrt{3}$ .

**Задача 2.** (2 балла, нельзя сдавать одновременно с №3) Пусть на плоскости даны две точки с координатами  $(s_1 + s_2\sqrt{3} + s_3\sqrt{11} + s_4\sqrt{33}; r_1 + r_2\sqrt{3} + r_3\sqrt{11} + r_4\sqrt{33})$ , где  $s_i, r_i \in \mathbb{Q}$ . И пусть прямая  $y = kx + b$  проходит через эти две точки. Докажите, что тогда числа  $k$  и  $b$  также имеют вид  $q_1 + q_2\sqrt{3} + q_3\sqrt{11} + q_4\sqrt{33}$ .

**Задача 3.** (2 балла, нельзя сдавать одновременно с №2) Докажите, что задачу 2 можно распространить на случай произвольного числового поля. То есть если координаты точек лежат в некотором числовом поле, а прямая  $y = kx + b$  проходит через эти точки, то и числа  $k, b$  лежат в этом поле.

**Задача 4.** (1 балл) По определению, число  $a$  делится на  $b$ , если существует такое число  $c$ , что  $a = bc$ . Изучите делимость на 0 в смысле этого определения.

**Задача 5.** Докажите, что множество чисел вида а) (1 балл)  $q_1 + q_2\sqrt{3}$ ; б) (1 балл)  $q_1 + q_2\sqrt{d}$ , где  $q_i$  и  $d$ , лежат в поле, образуют поле.

**Задача 6.** (2 балла) Пусть заданы две окружности, уравнения которых содержат коэффициенты из числового поля  $\mathbb{K}$ . Тогда найдётся такое число  $d \in \mathbb{K}$ , что все координаты точек пересечения окружностей имеют вид  $k_1 + k_2\sqrt{d}$ , где  $k_i \in \mathbb{K}$ .

**Задача 7.** (1 балл) Пусть дано числовое поле  $\mathbb{K}$  и число  $d \in \mathbb{K}$ . Докажите, что числа вида  $k_1 + k_2\sqrt{d}$ , где  $k_i \in \mathbb{K}$ , также образуют поле.

**Задача 8.** (1 балл) Докажите, что мы можем делить и умножать числа с помощью циркуля и линейки. То есть для данных отрезков длины  $a, b \in \mathbb{R}$  таких, что  $b \neq 0$ , можем построить отрезки длины  $a \cdot b$  и  $\frac{a}{b}$ , если задан единичный отрезок.

|   |   |   |   |        |        |   |   |   |
|---|---|---|---|--------|--------|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5<br>a | 5<br>b | 6 | 7 | 8 |
|   |   |   |   |        |        |   |   |   |

Фамилия, имя:

**Задача 1.** (2 балла) Докажите, что с помощью вещественного и комплексного квадратичных калькуляторов можно получить одни и те же точки на плоскости.

**Задача 2.** (1 балл) Сведите задачу о построении правильного  $n$ -угольника к задачам о построении правильных  $p_i$ -угольников, где  $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$  и  $p_k$  — простые числа.

**Задача 3.** (2 балла) Вычислите явно  $\lambda\tilde{\lambda}$ , где  $\xi = \sqrt[17]{2}$ ,  $\lambda = \xi^2 + \xi^4 + \dots + \xi^{16}$ , а  $\tilde{\lambda}$  — сумма нечётных степеней.

**Задача 4.** (1 балл) Вычислите явно  $\omega\tilde{\omega}$  и  $\zeta\tilde{\zeta}$ , где  $\xi = \sqrt[17]{2}$ ,  $\omega = \xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}}$ ,  $\tilde{\omega} = \xi^{3^2} + \xi^{3^6} + \xi^{3^{10}} + \xi^{3^{14}}$ ,  $\zeta = \xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}$ ,  $\tilde{\zeta} = \xi^{3^3} + \xi^{3^7} + \xi^{3^{11}} + \xi^{3^{15}}$ .

**Задача 5.** (2 балла) Из прошлой задачи следует, что  $\omega$  и  $\tilde{\omega}$  — корни уравнения  $x^2 - \lambda x - 1$ . Какому из чисел соответствует какой корень?

**Задача 6.** (1 балл) Докажите, что если число  $p = 2^k + 1$  — простое, то  $k = 2^l$  для некоторого числа  $l$ .

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|   |   |   |   |   |   |

Фамилия, имя:

**Задача 1.** (2 балла) Пусть дана линейно независимая система  $w_1, w_2, \dots, w_m$  и  $w_{m+1} < w_1, w_2, \dots, w_m >$ . Тогда система  $w_1, w_2, \dots, w_{m+1}$  также будет линейно независимой.

**Задача 2.** (3 балла) Пусть известно, что  $w_1, w_2, \dots, w_{m+1} \in < v_1, v_2, \dots, v_m >$  для некоторых  $v_i$ . Тогда система  $w_1, w_2, \dots, w_{m+1}$  линейно зависима.

**Задача 3.** (2 балла) Пусть даны  $w_1, w_2, \dots, w_l \in \mathbb{K}$ . Тогда любые два из следующих утверждений влекут третье:

1. Система  $w_1, w_2, \dots, w_l$  линейно независима.
2.  $< w_1, w_2, \dots, w_l > = \mathbb{K}$ .
3.  $l = n$ , где  $n = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ .

**Задача 4.** (3 балла) Пусть известно, что  $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$ . Докажите, что:

1. Если  $[K_3 : K_1] = n$ , то  $[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2] \cdot [K_2 : K_1]$ .
2. Если  $[K_3 : K_2]$  и  $[K_2 : K_1]$  конечны, то  $[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2] \cdot [K_2 : K_1]$ .

**Задача 5.** (2 балла) Докажите, что любое пересечение полей — тоже поле.

**Задача 6.** (1 балл) Докажите, что для  $d$ :  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  верно, что  $[\mathbb{Q}(\sqrt{d}) : \mathbb{Q}] = 2$ .

**Задача 7.** (1 балл) Докажите с помощью теоремы Виета, что если у какого-то из уравнений  $x^3 - 3x + 1$  и  $x^3 + x^2 - 2x - 1$ , то это может быть только  $\pm 1$ .

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|   |   |   |   |   |   |   |