

Задача 1*. В группе школьников 20 человек. Из них 5 человек одинаково хорошо и лучше всех остальных решают задачи по комбинаторике, 5 — по комбинаторной геометрии, 5 — по классической геометрии, 5 — по теории чисел и т.д. (всего 18 предметов, так что, очевидно, некоторые школьники в равной мере сильны в нескольких дисциплинах). Требуется составить из этих школьников команду для участия в олимпиаде. При этом хочется, чтобы для каждого предмета в команде нашелся специалист в нем и чтобы размер команды был как можно меньше. Всегда ли удастся собрать команду из шестерых школьников?

Задача 2. Рассмотрим в двадцатимерном пространстве некоторое множество точек V , содержащееся в множестве Σ :

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{20}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 20; x_1 + \dots + x_{20} = 5\}.$$

Иными словами, V — это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим, $|V| = 20$. Соединим точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ отрезком, если расстояние между ними есть $\sqrt{10}$. Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 7 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.

Задача 3. Рассмотрим в десятимерном пространстве некоторое множество точек V , содержащееся в множестве Σ :

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 10; x_1 + \dots + x_{10} = 5\}.$$

Иными словами, V — это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим, $|V| = 20$. Соединим точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ отрезком, если расстояние между ними есть $\sqrt{8}$. Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 9 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.

Задача 4. Пусть $l < k$. Положим величину $M(n, k, l)$ равной минимальному количеству таких k -элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$, что любое l -элементное подмножество $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Найдите

а) $M(n, k, 1)$. б) $M(n, 3, 2)$. в) Докажите, что $M(n, k, l) \geq \frac{n}{k} M(n-1, k-1, l-1)$.

Задача 5. С помощью результата задачи 4 докажите гипотезу Борсука.

Задача 6. Пусть у нас есть совокупность $A = A(n, s, k)$. Мы хотим узнать, сколько различных минимальных с.о.п. имеет данная совокупность. Обозначим эту величину через $\eta(A)$.

а) Приведите пример такой совокупности $A(2n, 2C_{n-1}^{k-1}, k)$, что $\eta(A) = 1, \tau(A) = 2$. б) Чему равно $\eta(A)$, когда A состоит из всех k -элементных подмножеств, т.е. когда $s = C_n^k$? в) При каком максимальном s найдется такая совокупность $A(n, s, k)$, что $\eta(A) = 2$?