

Системы представителей и задачи комбинаторной геометрии. Листок 1

Задача 1. Решите упражнение с лекции (если $|AA'| = |BB'|$, то шестиугольник центрально симметричный).

Задача 2. Приведите пример нецентрально-симметричного шестиугольника со всеми углами по 120 градусов.

Задача 3. Докажите, что квадрат со стороной 1 нельзя разбить на 3 части диаметра меньше 1.

Задача 4. Возьмем на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Он является универсальной покрывшкой на плоскости (это доказывать не нужно). Поставим произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ — также универсальная покрывшка на плоскости.

Задача 5. С помощью результата задачи 4 докажите гипотезу Борсука.

Назовем *универсальной покрывающей системой (упс)* в $\mathbb{R}^2$ любую совокупность множеств $\{S_\alpha\}$, обладающих тем свойством, что для всякого $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\text{diam } \Omega = 1$, существует движение, переводящее Ω внутрь хотя бы одного из множеств S_α .

Задача 6. Рассмотрим правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Возьмем отрезок, соединяющий центр шестиугольника с одной из его вершин, и проведем прямую, перпендикулярную этому отрезку, на расстоянии $1/2$ от центра. Прямая отсечет от шестиугольника треугольник. Докажите, что шестиугольник без указанного треугольника (обозначим его Ω'_6) также служит универсальной покрывшкой на плоскости.

Задача 7. Пусть вершины шестиугольника Ω_6 суть A, B, C, D, E, F . Пусть фигура Ω''_6 получена из Ω_6 удалением треугольников с вершинами A, B и C , а фигура Ω'''_6 получена удалением таких же точно треугольников с вершинами A, C и E . Докажите, что фигуры Ω''_6, Ω'''_6 образуют унс.

Задача 8. Докажите, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно разбить на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Используйте Ω_6 .

Системы представителей и задачи комбинаторной геометрии. Листок 1

Задача 1. Решите упражнение с лекции (если $|AA'| = |BB'|$, то шестиугольник центрально симметричный).

Задача 2. Приведите пример нецентрально-симметричного шестиугольника со всеми углами по 120 градусов.

Задача 3. Докажите, что квадрат со стороной 1 нельзя разбить на 3 части диаметра меньше 1.

Задача 4. Возьмем на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Он является универсальной покрывшкой на плоскости (это доказывать не нужно). Поставим произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ — также универсальная покрывшка на плоскости.

Задача 5. С помощью результата задачи 4 докажите гипотезу Борсука.

Назовем *универсальной покрывающей системой (упс)* в $\mathbb{R}^2$ любую совокупность множеств $\{S_\alpha\}$, обладающих тем свойством, что для всякого $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\text{diam } \Omega = 1$, существует движение, переводящее Ω внутрь хотя бы одного из множеств S_α .

Задача 6. Рассмотрим правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Возьмем отрезок, соединяющий центр шестиугольника с одной из его вершин, и проведем прямую, перпендикулярную этому отрезку, на расстоянии $1/2$ от центра. Прямая отсечет от шестиугольника треугольник. Докажите, что шестиугольник без указанного треугольника (обозначим его Ω'_6) также служит универсальной покрывшкой на плоскости.

Задача 7. Пусть вершины шестиугольника Ω_6 суть A, B, C, D, E, F . Пусть фигура Ω''_6 получена из Ω_6 удалением треугольников с вершинами A, B и C , а фигура Ω'''_6 получена удалением таких же точно треугольников с вершинами A, C и E . Докажите, что фигуры Ω''_6, Ω'''_6 образуют унс.

Задача 8. Докажите, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно разбить на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Используйте Ω_6 .