Раскраски множеств

А.М. Райгородский

1. На лекции было 20 человек и 15 пятерок. И мы показали, что в любом случае возможна раскраска в 2 цвета, при которой все пятерки неодноцветны. Будет ли результат тем же, если людей не 20, а 40, но пятерок по-прежнему 15?

2. Пусть людей k. Пусть вместо пятерок мы берем произвольные наборы из n человек. Докажите, что всегда можно заменить 15 на $2^{n-1}-1$ с сохранением результата, т.е. всегда найдется такая раскраска k людей в 2 цвета, что все $2^{n-1}-1$ наборов по n людей в каждом будут неодноцветными.

3. Докажите, что в задаче 2 можно заменить $2^{n-1}-1$ на 2^{n-1} с сохранением результата.

4. Рассмотрим тройки вместо пятерок. Пусть число людей всего лишь 5. Рассмотрим все возможные тройки, составленные из этих людей (таких троек получится 10 штук, убедитесь в этом). Можно ли так покрасить наших пятерых людей в 2 цвета, чтобы каждая из десяти троек была неоднoцветна?

5. Конструкцию, аналогичную той, что мы привели в задаче 4, можно предложить и для пятерок людей, не только для троек. Опишите эту конструкцию. Сколько в ней будет пятерок?

6. Пусть число людей k произвольно. Пусть из этих людей составлены произвольные 6 троек. Всегда ли есть раскраска людей, при которой все тройки неоднoцветны?

7. Найдите "границу" для троек, т.е. такое число m, что для любого количества k людей и любого набора из $m-1$ троек существует раскраска людей в 2 цвета, при которой все тройки неоднoцветны, но найдется такое количество k людей и такой набор из m троек, что при любой раскраске этих k людей в 2 цвета есть одноцветная тройка.

8. Докажите, что если тройки заменить на n, то граница, аналогичная описанной в задаче 7, не превосходит 4^n.

9. Пусть X — множество из k элементов. Пусть элементы множества X как-то упорядочены, т.е. занумерованы (всего есть $k!$ способов упорядочения-нумерации). Скажем, что данные два подмножества $A \subset X$, $B \subset X$, имеющие ровно 1 общий элемент x, образуют 2-цепь в данном упорядочении, если либо все элементы множества A, кроме x, предшествуют элементу x (т.е. имеют меньшие номера), а все элементы множества B, кроме x, следуют за элементом x (т.е. имеют большие номера), либо все то же самое с заменой A на B и B на A. Докажите, что для данной совокупности $\mathcal{F}$ подмножеств множества X существует раскраска элементов X в два цвета, при которой все подмножества из совокупности $\mathcal{F}$ неоднoцветны, тогда и только тогда, когда существует нумерация элементов множества X, при которой в $\mathcal{F}$ нет 2-цепей. Разумеется, мы считаем, что каждое множество состоит из не менее двух элементов (иначе ни цепи, ни понятие неоднoцветности смысла не имеют).

10. С помощью результата предыдущей задачи усильте нижнюю границу 16 для задачи о пятерках (число людей произвольно, не обязательно 20).