

Раскраски графов

А.М. Райгородский

1. Бывают ли графы $G = (V, E)$, у которых $\omega(G) > 100 \frac{|V|}{\alpha(G)}$?
2. Бывают ли графы $G = (V, E)$, у которых $\omega(G) < \frac{|V|}{100\alpha(G)}$?
3. Каких графов на 100 вершинах больше — тех, для которых $\omega(G) > \frac{|V|}{\alpha(G)}$, или тех, для которых $\omega(G) \leq \frac{|V|}{\alpha(G)}$? Ответ необходимо обосновать.
4. Пусть $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G (степень — это число ребер с концом в данной вершине). Докажите неравенство $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Для каждого n приведите примеры графов на n вершинах, на которых достигается указанная оценка.
5. Пусть вершины графа $G(n, r)$ — это все возможные r -элементные подмножества множества $\{1, \dots, n\}$. А ребра проведем между вершинами тогда и только тогда, когда соответствующие множества не пересекаются. Найдите кликовое число такого графа.
6. Найдите число независимости графа из задачи 5. Подсказка: воспользуйтесь идеями из лекции про пересечения множеств.
7. Докажите, что хроматическое число графа из задач 5 и 6 не больше n .
8. Докажите, что оценку из задачи 7 можно усилить, так что справедлива оценка $n - 2r + 2$.