# Системы общих представителей

А.М. Райгородский

**1.** Пусть вместо 20 человек у нас 22 человека, вместо пятерок шестерки (6 лучших школьников по каждому предмету), а всего шестерок 21 штука. Найдите как можно лучшие верхние и нижние оценки бюджета. В дальнейшем для удобства говорим "задача с параметрами 20, 5, 18" (как на лекции) или "задача с параметрами 22, 6, 21" (как сейчас) и т.д.

**2.** Получите как можно лучшие верхние и нижние оценки бюджета в задаче с параметрами 25, 6, 84.

**3.** Приведите пример задачи с какими-нибудь параметрами, в которой жадный алгоритм не выдает оптимальную систему представителей.

**4.** Сколько различиных минимальных систем представителей в задаче с параметрами 10, 4, A, где A — количество всех возможных четверок, какие в принципе можно составить из десяти человек ($A = 210$)?

**5.** Пусть $l < k$. Положим величину $M(n, k, l)$ равной минимальному количеству таких $k$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, что любое $l$-элементное подмножество $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Найдите

**а)** $M(n, k, 1)$. **б)** $M(n, 3, 2)$. **в)** Докажите, что $M(n, k, l) \geq \frac{n}{k} M(n-1, k-1, l-1)$.

**6**$^*$**.** Рассмотрим в двадцатимерном пространстве некоторое множество точек $V$, содержащееся в множестве $\Sigma$:

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{20}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 20; x_1 + \ldots + x_{20} = 5\}.$$

Иными словами, $V$ — это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим, $|V| = 20$. Соединим точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ отрезком, если расстояние между ними есть $\sqrt{10}$. Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 7 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.

**7**$^{**}$**.** Рассмотрим в десятимерном пространстве некоторое множество точек $V$, содержащееся в множестве $\Sigma$:

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{10}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 10; x_1 + \ldots + x_{10} = 5\}.$$

Иными словами, $V$ — это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим, $|V| = 20$. Соединим точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ отрезком, если расстояние между ними есть $\sqrt{8}$. Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 9 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.