Комбинаторная геометрия плоскости.

Григорьев Михаил Александрович*
Полянский Александр Андреевич†

Теоремы Хелли, Радона на прямой

Домашние задачи

1. Пусть есть на плоскости три конечных набора прямоугольников со сторонами параллельными осям координат. Известно, что любый два прямоугольника из разных семейств пересекаются. Докажите, что найдётся один из трёх наборов, в котором все прямоугольники имеют общую точку.

2. Пусть на прямой выбрано $2n+1$ отрезок так, что каждый из них пересекается с по крайней мере n другими отрезками. Тогда найдётся отрезок пересекающийся со всеми другими отрезками.

3. Пусть на прямой выбрано $mn+1$ отрезок. Тогда либо найдутся $m+1$ отрезка с общей точкой, либо $n+1$ попарно непересекающихся отрезка.

4. Дан синий отрезок длины l и несколько красных отрезков, содержащихся в синем и покрывающих его. Докажите, что можно выбросить несколько красных отрезков так, чтобы оставшиеся красные отрезки покрывали синий отрезок, и их суммарная длина была не более $2l$.

5. Дан синий отрезок и несколько красных отрезков, содержащихся в синем и покрывающих его. Докажите, что в каждом из красных отрезков можно выделить середину и покрасить в зелёный один из двух отрезков, на которые делит середина красный отрезок, так, чтобы зелёные отрезки покрывали по крайней мере треть длины синего отрезка.

6. Пусть на плоскости выбрано конечное число *равных* квадратов со сторонами параллельными осям координат. Известно, что среди любых $k+1$ квадрата найдутся два с общей точкой. Докажите, что эти квадраты можно поделить на $2k-1$ семейство так, что в каждом семействе все квадраты пересекаются.

7. Пусть на плоскости выбрано конечное число квадратов (не обязательно равных) со сторонами параллельными осям координат. Известно, что среди любых $k+1$ квадрата найдутся два с общей точкой.

* *e-mail*: mikhail.grigorev@phystech.edu
† *e-mail*: alexander.polyanskii@yandex.ru. Домашняя страничка: http://polyanskii.com/