X Зимняя школа «Комбинаторика и алгоритмы»
Даниил Мусатов, «Математика выборов»
Список зачётных задач
Для получения зачёта достаточно сдать любые 2 задачи из задач 1–3 и любые 2 задачи из задач 4–6

Мы изучаем механизмы голосования с k альтернативами и n избирателями. У каждого избирателя имеются строгие полные предпочтения на множестве альтернатив. (Т.е. альтернативы упорядочены от самой лучшей к самой худшей.)

1. Турнирным голосованием называется такая схема: сначала составляется сбалансированное двоичное дерево, на листьях которого записаны альтернативы. (Дерево сбалансировано, если длины его ветвей отличаются не больше, чем на 1). Затем проводится «турнир» между альтернативами согласно предпочтениям избирателей. Выбирается альтернатива, выигрывшая турнир.

а) Покажите, что результат зависит от расстановки альтернатив на листьях. Придумайте предпочтения, в которых может быть как можно больше разных победителей в зависимости от порядка. (В идеале — чтобы каждая альтернатива могла победить).

б) Пусть порядок альтернатив фиксирован. Придумайте пример, в котором возможно стратегическое голосование (группе избирателей может быть выгодно голосовать нечестно, так чтобы исход был лучше).

в) Пусть порядок альтернатив фиксирован. Придумайте пример, в котором есть зависимость от посторонних альтернатив. (Т.е. изменение предпочтений относительно C меняет победителя с A на B).

2. Правило Симпсона (максиминное) заключается в следующем: для каждых двух альтернатив A и B считается число $N(A, B)$ избирателей, для которых A лучше B. Далее считаем величину $S(A) = \min_{B \neq A} N(A, B)$. Альтернатива с максимальной $S(A)$ побеждает.

а) Победителем по Кондорсе называется такая альтернатива A, что для любой другой альтернативы B большинство избирателей считают, что A лучше B. Докажите, что если существует победитель по Кондорсе, то он является победителем по Симпсону.

б) Постройте пример, в котором победителя по Кондорсе нет, но победитель по Симпсону единственный.

в) Постройте пример, в котором победитель по Симпсону не единственный.

г) Постройте пример, в котором при правиле Симпсона выгодно стратегическое голосование (при исходных предпочтениях победитель должен быть единственным, при новых их может быть несколько, но каждый из них должен быть лучше исходного победителя).

д) Постройте пример, в котором результат применения правила Симпсона зависит от посторонних альтернатив. (При изменении предпочтений относительно C альтернатива A перестаёт быть победителем, но C им не становится).

3. Правило Баклина (правило Гранд-Джанкшен) заключается в следующем. Определяется порог $T = \left[\frac{V}{2}\right] + 1$, т.е. минимальное число голосов, необходимое для абсолютного большинства. Ищется минимальное m, такое что есть m альтернатив, встречающихся среди первых m позиций хотя бы у T избирателей. Побеждают те из этих альтернатив, у которых количество этих избирателей максимально.

а) Докажите, что хотя бы один победитель по Баклину всегда существует.

б) Всегда ли победитель по Кондорсе будет победителем по Баклину?

в) Постройте пример, в котором победителя по Кондорсе нет, но победитель по Баклину единственный.

г) Постройте пример, в котором при правиле Баклина выгодно стратегическое голосование.

д) Постройте пример, в котором результат применения правила Баклина зависит от посторонних альтернатив.

Теперь изучим задачу о пропорциональном представительстве. Пусть даны числа $a_1, \dots, a_k$ (голоса за партии / население штатов) $A = a_1 + \dots + a_k$ (общее число голосов / население), $M \ll A$ (число мест в парламенте). Требуется представить $M = m_1 + \dots + m_k$ для целых m_i (количество мест у каждой партии / штата), так чтобы $\frac{m_i}{M}$ было как можно ближе к $\frac{a_i}{A}$.

4. Правило Гамильтона работает следующим образом: возьмём $m_i' = \left[\frac{a_i}{A} \cdot M\right]$. Пусть $s = M - (m_1' + \dots + m_k')$. Увеличим на единицу s чисел m_i' с максимальными дробными частями $\frac{a_i}{A} \cdot M - m_i'$. Получим m_i.

а) Постройте пример, в котором имеет место парадокс населения: a_i растёт сильнее a_j, но m_i падает по сравнению с m_j (например, m_j остаётся прежним, а m_i уменьшается, или m_i остаётся прежним, а m_j растёт).

б) Постройте пример, в котором имеет место парадокс нового штата: появляется a_{k+1}, M увеличивается так, что $m_1 + \dots + m_k$ остаётся прежним, но сами m_i меняются.

5. Правила со знаменателями работают следующим образом: сначала выбирается какое-то правило округления: $\mathrm{round}(x) = [x]$, либо $\mathrm{round}(x) = [x]+1$. При этом функция round должна быть монотонной. Затем определяются значения $m_i = \mathrm{round}\left(\frac{a_i}{d}\right)$, где d подбирается так, чтобы выполнялось $M = m_1 + \dots + m_k$.

а) Возможны ли для правил со знаменателями парадокс населения, парадокс нового штата, парадокс Алабамы (т.е. немонотонность m_i по M)?

б) Правилом Хилла называется правило со знаменателем для стандартного округления к ближайшему целому. Постройте пример, когда нарушается правило квоты, т.е. между m_i и $\frac{a_i}{A} \cdot M$ отличаются больше, чем на 1.

6. Правилом Джефферсона называется правило со знаменателем для округления вниз. Докажите, что правило Джефферсона эквивалентно правилу Д'Ондта: для всех i рассматриваются числа $a_i, \frac{a_i}{2}, \dots, \frac{a_i}{M}$. Полученные Mk чисел сортируются, выбираются M максимальных. Партия i получает столько мест, сколько раз числа $\frac{a_i}{q}$ вошли в этот набор.