Дистанционные графы и теоремы типа Турана

Для зачета достаточно набрать 20 баллов.

Задачи к лекции 1

1. Пусть в графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть:

(a) (1 балл) треугольник; **(b)** (3 балла) n треугольников.

2. (3 балла) Пусть в графе на 30 вершинах все ребра покрашены в красный и синий цвета так, что не существует одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

3. Пусть G — дистанционный граф на $7n$ вершинах и с числом независимости $2n$. Докажите, что в нем не менее

(a) (2 балла) $9n$ ребер; **(b)** (3 балла, до 21.08) $10n$ ребер; **(c)** (3 балла, до 21.08) $11n$ ребер.

4. Теорему Турана можно сформулировать не только для ребер, но и для полных подграфов. В частности в графе на v вершинах, не содрежащем полного подграфа на n вершинах, найдите:

(a) (3 балла) Наибольшее количество треугольников при $n=4$;

(b) (2 балла) Наибольшее число полных подграфов на $n-1$ вершине;

(c) (3 балла) Наибольшее число полных подграфов на k вершинах.

Дистанционные графы и теоремы типа Турана

Для зачета достаточно набрать 20 баллов.

Задачи к лекции 1

1. Пусть в графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть:

(a) (1 балл) треугольник; **(b)** (3 балла) n треугольников.

2. (3 балла) Пусть в графе на 30 вершинах все ребра покрашены в красный и синий цвета так, что не существует одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

3. Пусть G — дистанционный граф на $7n$ вершинах и с числом независимости $2n$. Докажите, что в нем не менее

(a) (2 балла) $9n$ ребер; **(b)** (3 балла, до 21.08) $10n$ ребер; **(c)** (3 балла, до 21.08) $11n$ ребер.

4. Теорему Турана можно сформулировать не только для ребер, но и для полных подграфов. В частности в графе на v вершинах, не содрежащем полного подграфа на n вершинах, найдите:

(a) (3 балла) Наибольшее количество треугольников при $n=4$;

(b) (2 балла) Наибольшее число полных подграфов на $n-1$ вершине;

(c) (3 балла) Наибольшее число полных подграфов на k вершинах.

Дистанционные графы и теоремы типа Турана

Задачи к лекции 2

1c. (3 балла) Пусть в недвудольном графе на $2n$ вершинах $n^2 - n + 2$ ребра. Докажите, что в нем есть треугольник.

5. (1 балл) Докажите, что количество вершин в графе G не превосходит величины $\chi(G)\alpha(G)$.

6. (a) (по 0.5 балла) Вычислите $\chi(W_5)$, $\chi(MS{+}_1)$, $\chi(MS{+}_2)$ (см. рис. 1 – 3).

(b) (по 1.5 балла) Докажите, что W_5, $MS{+}_1$, $MS{+}_2$ при некотором ε не являются дистанционными графами в слойке $\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^d$.

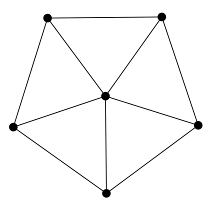

Рис. 1: W_5

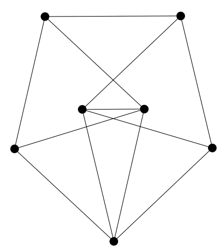

Рис. 2: $MS{+}_1$

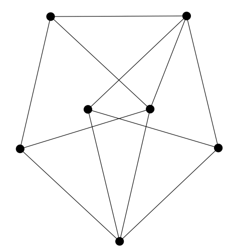

Рис. 3: $MS{+}_2$

7. (1.5 балла) Докажите, что W_5 без одной спицы не является дистанционным графом.

8. (4 балла) Докажите, что в графе на v вершинах, не содержащем $K_{m,n}$ (полного двудольного графа с долями из m и n вершин) не может быть больше, чем $\frac{1}{2}\left((m-1)^{1/n}v^{2-1/n} + nv\right)$ ребер. (Указание: воспользуйтесь рассуждением аналогичным рассуждению про $K_{2,2}$ и $K_{3,2}$)

9. (a) (по 1 баллу) Докажите, что графы $K_{3,2}$ и $K_{2,2,2}$ (полный трехдольный граф с долями по две вершины) не являются дистанционными на плоскости.

(b) (по 1.5 балла) Докажите, что графы $K_{3,3}$ и $K_{3,2,2}$ не являются дистанционными в трехмерном пространстве.

(c) (4 балла) Докажите, что при любых m, n граф $K_{m,n}$ является дистанционным в $\mathbb{R}^4$

(d) (5 баллов) Докажите, что полный $k + m$-дольный граф, в котором k долей из трех вершин и m долей из двух вершин не является дистанционным в $\mathbb{R}^{2k+m-1}$.

10. (5 баллов) Докажите, что существует конечный граф G являющийся дистанционным в $\mathbb{Q}^n$ такой, что $\chi(G) = \chi(\mathbb{Q}^n)$.

11. (7 баллов) Пусть G — граф, который является дистанционным в $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$ при любом положительном ε. Докажите, что он является дистанционным в $\mathbb{R}^n$, если разные вершины не обязательно соответствут разным точкам плоскости, а вершины на расстоянии 1 не обязательно соединены ребром.

Дистанционные графы и теоремы типа Турана

Задачи к лекции 3

12. Пусть G — граф на v вершинах без треугольников и с числом независимости α.

(a) (4 балла) Какое наименьшее количество ребер может быть в графе G, если $2\alpha \leqslant n \leqslant 2.5\alpha$?

(b) Оцените сверху (2 балла) и снизу (3 балла) количество ребер в графе G при условии $2.5\alpha \leqslant n \leqslant 3\alpha$. Нижняя оценка не должна следовать из оценки предыдущего пункта, за точный ответ $+2$ балла.

13. (10 баллов) Докажите, что граф на рисунке 4 не является дистанционным в $\mathbb{R}^3$.

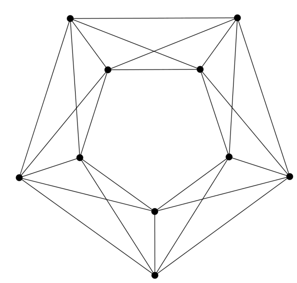

Рис. 4:

14. (12 баллов) Пусть в дистанционном графе на $4n$ вершинах число независимости не превосходит n. Для какого-нибудь положительного ε докажите, что в графе не менее $(8+\varepsilon)n$ ребер.

15. (15 баллов) Пусть в дистанционном графе в $\mathbb{R}^3$ на $5n$ вершинах число независимости не превосходит n. Для какого-нибудь положительного ε докажите, что в графе не менее $(12.5+\varepsilon)n$ ребер.

16. (15 баллов) Найдите наименьшее возможное число ребер в дистанционном в $\mathbb{R}^3$ графе на $9n$ вершинах и с числом независимости $2n$.