Числа Эйзенштейна.

14-17.08.2017

Под $\mathbb{Z}[\omega]$ подразумевается множество элементов $\{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}, \omega$ — кубический корень из $1\}$.

Задача 1. Обозначим через $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$. Будем называть это число *нормой* числа $a + b\omega$. Докажите, что

а) $N(a + b\omega) = (a + b\omega)(a + b\omega^2)$;

б) норма является неотрицательным целым числом;

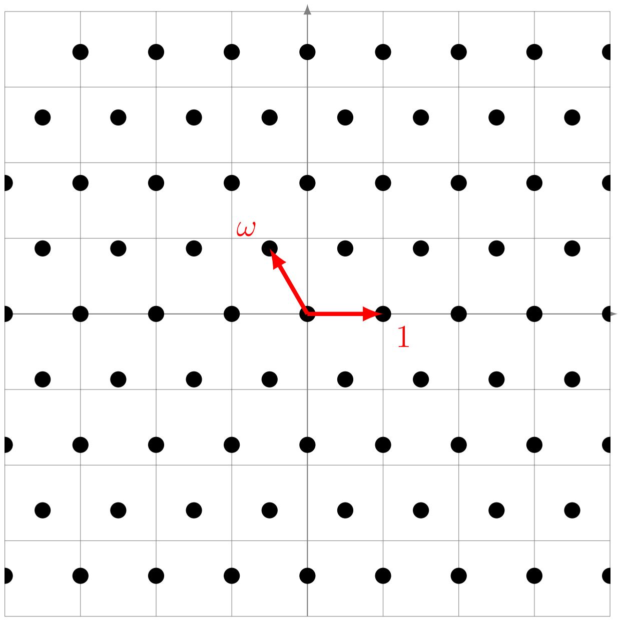
в) $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$ для $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$.

Задача 2. **а)** Какую норму может иметь обратимое число? **б)** Докажите, что имеется 6 обратимых элементов в $\mathbb{Z}[\omega]$ и опишите их.

Положим $\lambda = 1 - \omega$.

Задача 3. Найдите норму λ и докажите, что λ — неразложимый элемент.

Задача 4. Для любого простого элемента $\alpha + \beta\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$, отличного от λ найдётся ассоциированный с ним простой $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\omega$, у которого $\tilde{\alpha} \equiv 2 \pmod 3$, $\tilde{\beta} \vdots 3$.



Задача 5. Пусть p — простое целое число.

а) Если $p = 3$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

б) Если $p = 3k + 2$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

в) Если $p = 3k + 1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

г) Если $p = 3k + 1$, то $p = z\overline{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[\omega]$.

Задача 6. На картинке справа нарисованы числа Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\omega]$. Отметьте на этой картинке простые элементы этого кольца.

Задача 7. Пусть $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ — простое число. Докажите, что множество остатков по модулю z является полем из $N(z)$ элементов.