Уравнения Пелля

1. Докажите, что целые неотрицательные числа x и y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m - данное целое число) тогда (1 балл) и только тогда (2 балла), когда x и y соседние числа последовательности $\phi_0 = 0, \phi_1 = 1, \phi_2 = m, \ldots, \phi_{k+1} = m\phi_k - \phi_{k-1}, \ldots$

2. В круглом саду радиуса 1,001 км деревья рассажены в вершинах квадратной сетки со стороной квадрата 1 м. В вершинах сетки, лежащих на границе сада, деревья тоже посажены. Если расстояние от вершины сетки до границы сада меньше радиуса дерева, то дерево вылезает за границу сада. Единственная вершина сетки, где дерево не посажено, - вершина сада. Радиус каждого дерева равен 1 мм. Докажите, что вид из центра сада полностью заслонен (т.е. любой луч, выходящий из него, пересекает какой-нибудь ствол). (1 балл)

3. Решите задачу 2 для круга радиусом 1 км. (1 балл)

4. Докажите, что равнение $x^2 - 11y^2 = 17$ не имеет решения в целых числах. (1 балл)

5. Если последовательность элементов бесконечно цепной дроби периодическая, то число α является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. (2 балла)

6. Существует ли дробь, которая приближает число $\sqrt{2}$ с точностью до одной миллионной, а ее знаменталь - трехзначное число? (2 балла)

7. Пусть (x, y) – положительное решение уравнения Пелля. Тогда докажите, что $|\frac{x}{y} - \sqrt{m}| < \frac{1}{2y^2}$ (1 балл)

8. Найдите основное решение уравнения $x^2 - 19y^2 = 1$ (1 балл)

9. Пусть a, b, c - целые числа, при этом $a > 0,\ ac - b^2 = 1$. Докажите, что уравнение $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ имеет целочисленное решение. (5 баллов)

Теоретические вопросы

10. Докажите лемму Минковского (1 балл)

11. Докажите, что существует гипербола, на которой лежит бесконечно много целочисленных точек (2 балла).

12. Из предыдущего вопроса выведите существования решения уравнения Пелля (1 балл).

13. Докажите, что $p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1}$ (1 балл)

14. Докажите, что $p_{n-1}q_n + p_n q_{n-1} = (-1)^n$ (1 балл)

15. Докажите, что $r_n \to \alpha$ (1 балл)

Набор 10 баллов гарантирует вам зачет по курсу "уравнения Пелля". Точная нижняя граница зачета будет определена 23-го числа.