В.А. Воронов. Геометрия целых квадратичных форм

Листок 1

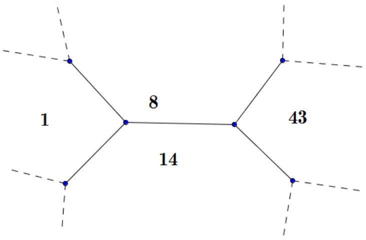
Обозначим $v = (x, y)$. Целая бинарная квадратичная форма (далее для краткости просто "форма") — это функция $f(v) = ax^2 + bxy + cy^2$, где a, b, c целые.

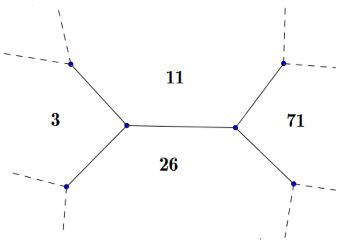
1. Пусть $B(u, v) = f(u + v) - f(u) - f(v)$. Докажите, что **(a)** при любом целом k выполнено $B(ku, v) = kB(u, v)$ **(b)** $f(u - v) = f(u) + f(v) - B(u, v)$ **(c)** $f(u + v) + f(u - v) = 2(f(u) + f(v))$.

2. Выведите из (1c) теорему Аполлония: если AD — медиана в треугольнике ABC, то $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

3. Пусть A, B_0, B_1 — попарно соседние области карты, в которых форма принимает значения 1,2,3 соответственно; B_k — области, граничащие с A; $f(B_k)$ — значения формы в этих областях. Найдите коэффициенты многочлена $f(B_k) = pk^2 + qk + r$.

4. Найдите формы с минимальными значениями суммы $|a|+|c|$, отвечающие картам на рисунке.





5. Постройте карты для форм **(a)** $f(v) = x^2 + 3xy + y^2$ **(b)** $f(v) = (x - y)^2$.

6. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены 3-й степени с целыми коэффициентами, и их множества значений в целых точках совпадают. Докажите, что либо $P(x) = Q(x + k)$, либо $P(x) = Q(-x + k)$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

В.А. Воронов. Геометрия целых квадратичных форм

Листок 2

Супервершина — это вершина графа с минимальной суммой трех значений формы.

Озеро — грань графа с нулевым значением формы.

Река — путь, состоящий из ребер, отделяющих области, в которых значения формы положительны, от областей, где значения отрицательны. Реки встречаются на картах, построенных для знакопеременных форм.

Вектор $v = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ — *примитивный*, если НОД$(x, y) = 1$.

1. Найти супервершину и разложение относительно нее по формуле Зеллинга для карты на рисунке.

2. Форме $x^2 + y^2$ соответствует карта с двумя супервершинами, соединенными ребром (в них сумма трех значений формы одинакова). Докажите, что на карте, построенной для положительно определенной формы, не может быть трех (или большего числа) вершин с одинаковой суммой значений формы, образующих компоненту связности, если взять эти вершины и ребра, проведенные между ними.

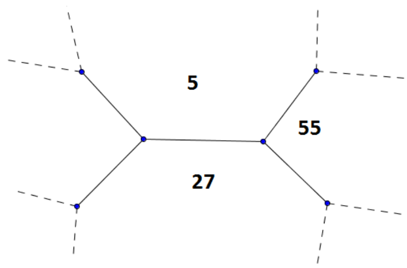


Рис. 1: .

3. Найдите реку на карте, составленной для формы $x^2+5xy-y^2$. Убедитесь, что при движении вдоль реки тройки значений формы периодически повторяются.

4. Докажите, что река единственна для любой знакопеременной формы. (Указание: используйте направленные ребра в области положительных и отрицательных значений. Ребра направлены в сторону увеличения суммы трех значений формы.)

5. Найдите форму, для которой карта содержит два смежных озера.

6. Докажите, что если форма не равна нулю тождественно, то существует не более двух различных примитивных векторов, на которых форма равна нулю.

7. Пусть форма f обращается в ноль на двух различных примитивных векторах. Докажите, что ее карта содержит два озера, соединенных рекой.

8. Придумайте алгоритм проверки разрешимости диофантова уравнения $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ (a, b, c, n целые).

9. Сопоставим каждому примитивному вектору $v = (x, y)$ число $p = x/y$ при $y \neq 0$ и $p = \infty$ в противном случае и напишем это число на грани дерева. Для каждой грани найдем длину кратчайшего пути до грани, помеченной значком ∞ (т.е. кратчайшего пути на двойственном графе). Пусть $...P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, ...$ — грани, для которых длина кратчайшего пути равна 10^{100}, причем P_i граничит с P_{i-1} и P_{i+1}. Докажите, что на этих гранях написана упорядоченная (по возрастанию или по убыванию) последовательность чисел.