Школьная теория групп

Алексей Савватеев

Февраль 2017

1. Почему, говоря об абелевой группе по умножению в поле, мы исключаем ноль? (max 3)
2. Доказать, что всякое движение, оставляющее на месте равносторонний треугольник, переставляет его вершины. (max 2)
3. Доказать, что любое движение плоскости — биекция. (max 2)
4. Заполнить таблицу, умножая перестановки справа налево: (max 2)

	e	(ab)	(bc)	(ac)	(abc)	(acb)
e						
(ab)						
(bc)						
(ac)						
(abc)						
(acb)						

5. Заполнить таблицу: (max 2)

	Id	R_{120}	R_{240}	S_1	S_2	S_3
Id						
R_{120}						
R_{240}						
S_1						
S_2						
S_3						

6. Доказать, что для любого изоморфизма $\phi : G \to H$ верно: $\phi(e)$ — единица в H, $\phi^{-1}(g) = \phi(g^{-1})$. (max 1)
7. Показать, что $x \oplus 4\mathbb{Z} = x' \oplus 4\mathbb{Z} \Leftrightarrow 4|(x - x')$. (max 1)
8. Показать, что $(x \oplus 4\mathbb{Z}) \oplus (y \oplus 4\mathbb{Z}) = (x + y) \oplus 4\mathbb{Z}$. (max 1)
9. Как может быть устроена циклическая группа G: что произойдёт, если не все степени g различны? (max 2)

Школьная теория групп

Алексей Савватеев

Февраль 2017

1. Докажите, что для $\forall$ остатка k по модулю m следующие утверждения эквивалентны: (max 1)
   - В k-ой строке нет 0.
   - В k-ой строке все числа разные.
   - В k-ой строке встретится 1.
2. Докажите, что в условиях предыдущей задачи выполнено НОД$(k, n) = 1$. (max 2)
3. Любой идеал кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид $\{mx, x \in \mathbb{Z}\}$. (max 2)
4. Докажите, что любая группа 4-го поряка изоморфна либо V_4, либо $\mathbb{Z}_4$. (max 2)
5. Для любого простого p существует и единственна группа порядка p (а именно, $\mathbb{Z}_p$). (max 2)
6. (*) Найти все группы порядка 8. (max 5)
7. (*) Классифицировать все конечные группы движения плоскости. (max 5)