Листок 1

Задача 1. Докажите неравество

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geqslant k) \leqslant C_n^k (1-p)^{C_k^2}.$$

Задача 2. С помощью результата задачи 1 докажите, что при $p = 1/2$ число независимости случайного графа а.п.н. не больше $2\log_2 n$, а стало быть, хроматическое число случайного графа а.п.н. не меньше $\frac{n}{2\log_2 n}$.

Задача 3. Докажите, что при $p = \frac{1}{n^{0.9}}$ хроматическое число случайного графа а.п.н. стремится к бесконечости. **Указание.** Воспользуйтесь задачей 1 и концовкой задачи 2.

Листок 2

Задача 1. Найдите $\mathbb{M}\,X$ для случайной величины X, равной **а)** числу K_5 в $G(n,p)$; **б)** числу полных подграфов на k вершинах (k-*клик*) в $G(n,p)$; **в)** числу различных k-вершинных деревьев в $G(n,p)$; **г)** числу изолированных k-вершинных деревьев в $G(n,p)$; **д)** числу вершин на древесных компонентах $G(n,p)$; **е)** числу вершин на циклических компонентах $G(n,p)$.

Задача 2. Найдите дисперсию числа треугольников в случайном графе $G(n,p)$.

Задача 3. С помощью неравества Чебышёва докажите, что если X принимает неотрицательные целые значения, то

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{D}\,X}{(\mathbb{M}\,X)^2}.$$

Задача 4. С помощью задачи 3 докажите, что при $pn^2 \to \infty$ а.п.н. $\chi(G(n,p)) \geqslant 2$.

Задача 5. С помощью неравенства Маркова докажите, что при $pn \to 0$ в случайном графе а.п.н. нет треугольников.

Задача 6. С помощью задач 2 и 3 докажите, что при $pn \to \infty$ в случайном графе а.п.н. есть треугольники.