# Задачи к курсу
# «Динамика на окружности. Начало.»

$\{\,\cdot\,\}$ — дробная доля
$\|\cdot\|$ — расстояние до ближайшего целого, то есть $\|x\| = \min\big(\{\,x\,\}, 1 - \{\,x\,\}\big)$

**Задача 1.** Пусть $\alpha$ иррационально. Рассмотрим последовательность

$$0,\ \{\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \{3\alpha\}, \ldots, \{(N-1)\alpha\}.$$

Упорядочим эти числа по возрастанию:

$$0 = \{n_0\alpha\} < \{n_1\alpha\} < \{n_2\alpha\} < \{n_3\alpha\} < \ldots < \{n_{N-1}\alpha\}.$$

Докажите, что соответствующие точки на окружности разбивают её на $N$ дуг, $N - n_1$ из которых имеют длину $\|n_1\alpha\|$, $N - n_{N-1}$ имеют длину $\|n_{N-1}\alpha\|$, а $n_1 + n_{N-1} - N$ имеют длину $\|n_1\alpha\| + \|n_{N-1}\alpha\|$.

**Задача 2.** Обозначим через $h_N$ длину наименьшей дуги, на которые точки $\{n\alpha\}$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, делят окружность. Докажите, что если неполные частные $\alpha$ неограничены, то
а) существует последовательность $N_1, N_2, N_3, \ldots$, такая что $N_i h_{N_i} \to 0$ при $i \to \infty$;
б) существует последовательность $N_1, N_2, N_3, \ldots$, такая что $N_i h_{N_i} \to 1$ при $i \to \infty$.

**Задача 3.** Обозначим через $H_N$ длину наибольшей дуги, на которые точки $\{n\alpha\}$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, делят окружность. Докажите, что если неполные частные $\alpha$ неограничены, то
а) существует последовательность $N_1, N_2, N_3, \ldots$, такая что $N_i H_{N_i} \to 1$ при $i \to \infty$;
б) существует последовательность $N_1, N_2, N_3, \ldots$, такая что $N_i H_{N_i} \to \infty$ при $i \to \infty$.

**Задача 4.** Докажите, что последовательность дробных долей $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно распределена, т.е. для любого интервала $(a, b) \subseteq (0, 1)$ доля точек $\{n\alpha\}$, таких что $0 \leqslant n \leqslant N-1$ и $a < \{n\alpha\} < b$, стремится к $b - a$ при $N \to \infty$.